Module : Les radicaux

A. Additionner et soustraire des radicaux
B. Multiplier et diviser des radicaux
C. Résolution d'équations ayant des radicaux

A. Additionner et soustraire des radicaux

Rappels :

radical

indice $\longrightarrow \sqrt[3]{\underbrace{3x+2}_{\text{radicande}}}$

Les radicaux qui ont le même radicande et le même indice sont des **radicaux semblables**. N.B. Si il n'a pas d'indice, c'est sous-entendu que la valeur de l'indice est 2 (une racine carrée).

Comme dans l'algèbre, on peut seulement additionner et soustraire les radicaux semblables.

Ex. $2x + 5x = 7x$ *Ce sont des termes x^1 , donc ils sont des termes semblables. On additionne seulement les coefficients. La puissance de x n'a pas changé.*

Parfois, il est nécessaire de réécrire les radicaux sous forme composée ou entière pour déterminer les radicaux semblables.

Forme entière : $\sqrt{200}$ Forme composée : $10\sqrt{2}$

En 10e année, tu as appris comment transformer les radicaux en différentes formes.

Ex. $\sqrt{200} = \sqrt{100 \cdot 2}$

$\sqrt{100} \cdot \sqrt{2}$

$10\sqrt{2}$

Ex. $10\sqrt{2} = \sqrt{10^2} \cdot \sqrt{2}$

$\sqrt{100} \cdot \sqrt{2}$

$\sqrt{200}$

Ex. Effectue l'opération indiquée.

a) $\sqrt{50} + 3\sqrt{2} = \sqrt{25 \cdot 2} + 3\sqrt{2}$

$5\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$

$8\sqrt{2}$

b) $-\sqrt{27} + 3\sqrt{5} - \sqrt{80} - 2\sqrt{12}$

$-\sqrt{9 \cdot 3} + 3\sqrt{5} - \sqrt{16 \cdot 5} - 2\sqrt{4 \cdot 3}$

$-3\sqrt{3} - 2(2)\sqrt{3} + 3\sqrt{5} - 4\sqrt{5}$

$-3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} - \sqrt{5}$

$-7\sqrt{3} - \sqrt{5}$

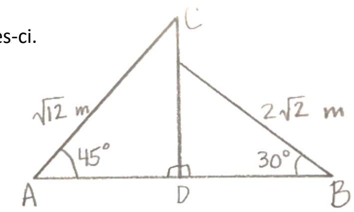
c) $\sqrt{4x} - 4\sqrt{9x}$, où $x \geq 0$

$2\sqrt{x} - 4(3)\sqrt{x}$

$2\sqrt{x} - 12\sqrt{x}$

$-10\sqrt{x}, où\ x \geq 0$

N.B. Lorsque les radicaux pairs ont des variables, on doit identifier les restrictions de celles-ci.



Ex. Quelle est la longueur <u>exacte</u> du segment $\overline{AB}$?

$\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{DB}$

$\overline{AD}$:

$\cos 45° = \frac{\overline{AD}}{\sqrt{12}}$

$(\sqrt{12})\cos 45° = \overline{AD}$

$(\sqrt{12})\frac{\sqrt{2}}{2} = \overline{AD}$

$\frac{\sqrt{24}}{2} = \overline{AD}$

$\frac{2\sqrt{6}}{2} = \overline{AD}$

$\sqrt{6}\,m = \overline{AD}$

$\overline{DB}$:

$\cos 30° = \frac{\overline{DB}}{2\sqrt{2}}$

$(2\sqrt{2})\cos 30° = \overline{DB}$

$(2\sqrt{2})\frac{\sqrt{3}}{2} = \overline{DB}$

$\frac{2\sqrt{6}}{2} = \overline{DB}$

$\sqrt{6}\,m = \overline{DB}$

$\overline{AB} = \sqrt{6} + \sqrt{6}$

$\overline{AB} = 2\sqrt{6}\,m$

Exercice 1 (pg 278) #2ac, 3, 6c, 10 et 14

B. Multiplier et diviser des radicaux

<u>Multiplication</u>

Quand on multiplie des radicaux, on doit multiplier les coefficients, puis multiplier les radicandes.

En général, $(m\sqrt[k]{a})(n\sqrt[k]{b}) = mn\sqrt[k]{ab}$, où k est un nombre naturel strictement positif et m, n, a et b sont des nombres réels. Si k est pair, alors $a \geq 0$ et $b \geq 0$.

Comme dans l'algèbre, on multiplie les coefficients et on multiplie les variables.

Ex. $2x \cdot 5x = 10x^2$

La multiplication est possible seulement si les radicaux ont le même indice. Sinon, c'est comme la multiplication en algèbre avec deux variables différentes, où on multiplie les coefficients et les variables sont rapprochées.

Ex. $2x \cdot 5y = 10xy$

Ex. Effectue les multiplications et simplifie le produit si possible.

a) $5\sqrt{3}(\sqrt{6}) = 5\sqrt{18}$

$5\sqrt{9 \cdot 2}$

$5(3)\sqrt{2}$

$15\sqrt{2}$

b) $-2\sqrt[3]{11}\,(4\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{3})$ *applique la distributivité, attention à la racine cubique*

$-8\sqrt[3]{22} + 6\sqrt[3]{33}$

Ça ne se simplifie pas davantage

c) $(4\sqrt{2} + 3)(\sqrt{7} - 5\sqrt{14})$

$4\sqrt{14} - 20\sqrt{28} + 3\sqrt{7} - 15\sqrt{14}$

$-11\sqrt{14} - 20\sqrt{4 \cdot 7} + 3\sqrt{7}$

$-11\sqrt{14} - 40\sqrt{7} + 3\sqrt{7}$

$-11\sqrt{14} - 37\sqrt{7}$

d) $-2\sqrt{11x}\,(4\sqrt{2x^3} - 3\sqrt{3})$, où $x \geq 0$

$-8\sqrt{22x^4} + 6\sqrt{33x}$

$-8\sqrt{22x^2 \cdot x^2} + 6\sqrt{33x}$

$-8x^2\sqrt{22} + 6\sqrt{33x}, où\ x \geq 0$

Division

Quand on divise des radicaux, on doit diviser les coefficients, puis diviser les radicandes.

Ex. $\frac{4\sqrt[3]{6}}{2\sqrt[3]{3}} = 2\sqrt[3]{2}$

* Généralement, la division est possible seulement si les radicaux ont le même indice. Mais, si le même radicande, transforme le radical en exposant rationnel :

Ex. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{3}}}$

$2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{6}}\ ou\ \sqrt[6]{2}$

Pour simplifier une expression qui comporte un radical au dénominateur, on doit **rationaliser** le dénominateur.
Pour rationaliser le dénominateur, on doit convertir une expression en un nombre rationnel sans changer sa valeur.
On fait ceci en multipliant le numérateur et le dénominateur par une quantité qui donnera un nombre rationnel au dénominateur.
C'est-à-dire, on élimine le radical dans le dénominateur, sans changer la valeur de l'expression.
C'est semblable à trouver le dénominateur commun quand on additionne ou soustrait des fractions.

Ex. $\frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$$\frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{9}} = \frac{5\sqrt{3}}{2(3)}$$

$$\frac{5\sqrt{3}}{6}$$

Ex. Divise et simplifie les expressions.

a) $\frac{2\sqrt{51}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{17}$

b) $\frac{-7}{2\sqrt[3]{9p}} = \frac{-7}{2\sqrt[3]{9p}} \cdot \frac{\sqrt[3]{9p}}{\sqrt[3]{9p}} \cdot \frac{\sqrt[3]{9p}}{\sqrt[3]{9p}}$ *il faut rationnaliser le déno, 2 fois car une racine cubique*

$$\frac{-7\sqrt[3]{81p^2}}{2\sqrt[3]{729p^3}}$$

$$\frac{-7\sqrt[3]{27 \cdot 3p^2}}{2(9)(p)}$$

$$\frac{-7\cancel{(3)}\sqrt[3]{3p^2}}{2\cancel{(3)}3p}$$

$$\frac{-7\sqrt[3]{3p^2}}{6p}$$

Si le dénominateur est un binôme contenant une racine carrée, on doit multiplier le numérateur et le dénominateur par un **conjugué** du dénominateur.

Rappel : les conjugués sont deux facteurs binomiaux dont le produit est une différence de carrées. Ex. $(a + b)$ et $(a - b)$ sont des conjugués car leur produit est égal à $(a^2 - b^2)$.

Ex. $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})$ = $(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{xy}) - (\sqrt{xy}) - (\sqrt{y})^2$

$x - y$

On finit par éliminer la somme (ce qui élimine le radical) et laisse des carrés parfaits.

c) $\frac{2}{3\sqrt{5}-4}$ *la conjuguée sera du dénominateur est* $3\sqrt{5}+4$

$$\frac{2}{3\sqrt{5}-4} \cdot \frac{3\sqrt{5}+4}{3\sqrt{5}+4}$$

$$\frac{6\sqrt{5}+8}{9\sqrt{25}+12\sqrt{5}-12\sqrt{5}-16}$$

$$\frac{6\sqrt{5}+8}{9(5)-16}$$

$$\frac{6\sqrt{5}+8}{29}$$

d) $\frac{6}{\sqrt{4x}+1} \cdot \frac{\sqrt{4x}-1}{\sqrt{4x}-1}$

$$\frac{6\sqrt{4x}-6}{\sqrt{16x^2} - \sqrt{4x} + \sqrt{4x} - 1}$$

$\frac{6(2)\sqrt{x}-6}{4x-1}$

$\frac{12\sqrt{x}-6}{4x-1}, où\ x \geq 0\ et\ x \neq \frac{1}{4}$

Exercice 2 (pg 289) : #1d, 3b, 4cd, 6b, 7a, 11b, 18

C. Résolution d'équations ayant des radicaux

Quand on résout une équation contenant un ou des radicaux, il faut :

- Isoler un des radicaux;
- Pour éliminer une racine carrée, il faut élever au carré les deux membres de l'équation;
- Reconnaître toute restriction sur les valeurs de la variable. Rappels :
  - Un dénominateur ne peut pas être égal à 0,
  - Pour qu'un radical soit un nombre réel, le radicande doit être non négatif si l'indice du radical est un nombre pair.

- Déterminer s'il y a des racines étrangères en vérifiant si toutes les valeurs satisfont l'équation initiale. La vérification des solutions est obligatoire dans ce module.

Ex. Détermine toute restriction sur les valeurs de *x* dans l'équation -8 + $\sqrt{\frac{3x}{5}}$ = -2 si le radical est un nombre réel. Ensuite, résous l'équation.

Restriction :
$\frac{3x}{5} \geq 0$
$3x \geq 0$
$x \geq 0$

$$-8 + \sqrt{\frac{3x}{5}} = -2$$

$$\sqrt{\frac{3x}{5}} = 6$$

$$\left(\sqrt{\frac{3x}{5}}\right)^2 = (6)^2$$

$$\frac{3x}{5} = 36$$

$$3x = 180$$

$$x = 60$$

Vérification : $x = 60$

Côté gauche (CG)	**Côté droit (CD)**
$-8 + \sqrt{\frac{3x}{5}}$ $-8 + \sqrt{\frac{3(60)}{5}}$ $-8 + \sqrt{\frac{180}{5}}$ $-8 + \sqrt{36}$ $-8 + 6$ -2	-2

La solution est valide; $x = 60$

Ex. Détermine les restrictions sur les valeurs de *t* dans *t* - $\sqrt{2t+3}$ = 6 si l'équation présente des nombres réels. Ensuite, résous l'équation.

Restriction :

$2t + 3 \geq 0$

$2t \geq -3$

$t \geq -\frac{3}{2}$

$$t - \sqrt{2t+3} = 6$$

$$t - 6 = \sqrt{2t+3}$$

$$(t-6)^2 = \left(\sqrt{2t+3}\right)^2$$

$$t^2 - 12t + 36 = 2t + 3$$

$$t^2 - 14t + 33 = 0$$

$$(t-3)(t-11) = 0$$

$$t = 3 \; et \; t = 11$$

Vérification : $t = 3$

CG	CD
$t - \sqrt{2t+3}$ $(3) - \sqrt{2(3)+3}$ $3 - \sqrt{9}$ $3 - 3$ 0	6

CG ≠ CD

Vérification : $t = 11$

CG	CD
$t - \sqrt{2t+3}$ $(11) - \sqrt{2(11)+3}$ $11 - \sqrt{25}$ $11 - 5$ 6	6

La solution est valide; $t = 11$.

Ex. Résous l'équation $\sqrt{3+y} + \sqrt{2y-1} = 5$, où $y \geq \frac{1}{2}$.

$$\sqrt{3+y} + \sqrt{2y-1} = 5$$

$$\sqrt{2y-1} = 5 - \sqrt{3+y}$$

$$\left(\sqrt{2y-1}\right)^2 = \left(5 - \sqrt{3+y}\right)^2$$

$$2y - 1 = 25 - 5\sqrt{3+y} - 5\sqrt{3+y} + (3+y)$$

$$2y - 1 - 25 - 3 - y = -10\sqrt{3+y}$$

$$y - 29 = -10\sqrt{3+y}$$

$$(y-29)^2 = \left(-10\sqrt{3+y}\right)^2$$

$$y^2 - 58y + 841 = 100(3+y)$$

$$y^2 - 58y + 841 = 300 + 100y$$

$$y^2 - 158y + 541 = 0$$

J'ai utilisé la formule quadratique pour résoudre l'équation.

$$y = 79 \pm 10\sqrt{57}$$

Vérification : $y = 79 + 10\sqrt{57}$ *ou* $154{,}498 \ldots$.

CG	**CD**
$\sqrt{3+y} + \sqrt{2y-1}$ $\sqrt{3+(154{,}498\ldots)} + \sqrt{2(154{,}498\ldots)-1}$ $\sqrt{157{,}498\ldots} + \sqrt{307{,}996\ldots}$ $12{,}5498\ldots + 17{,}5498\ldots$ $30{,}09\ldots$	5

$$CG \neq CD$$

Vérification : $y = 79 - 10\sqrt{57}\ ou\ 3{,}501\ \ldots$.

CG	**CD**
$\sqrt{3+y} + \sqrt{2y-1}$ $\sqrt{3+(3{,}501\ \ldots)} + \sqrt{2(3{,}501\ \ldots)-1}$ $\sqrt{6{,}501\ \ldots} + \sqrt{6{,}002\ \ldots}$ $2{,}549\ \ldots + 2{,}449\ \ldots$ $4{,}998\ \ldots$	5

$$CG \cong CD$$

Ce n'est pas exacte car on a utilisé la valeur approximative donnée par la calculatrice.

La solution est valide; $y = 79 - 10\sqrt{57}$.

Exercice 3 (pg 300) : # 4c, 5, 6b, 8d, 9c, 10c et 14