Les fonctions et les équations quadratiques

A. Les formes des fonctions quadratiques
B. Compléter le carré
C. Résolution de problèmes
D. Les équations quadratiques

A. Les formes des fonctions quadratiques

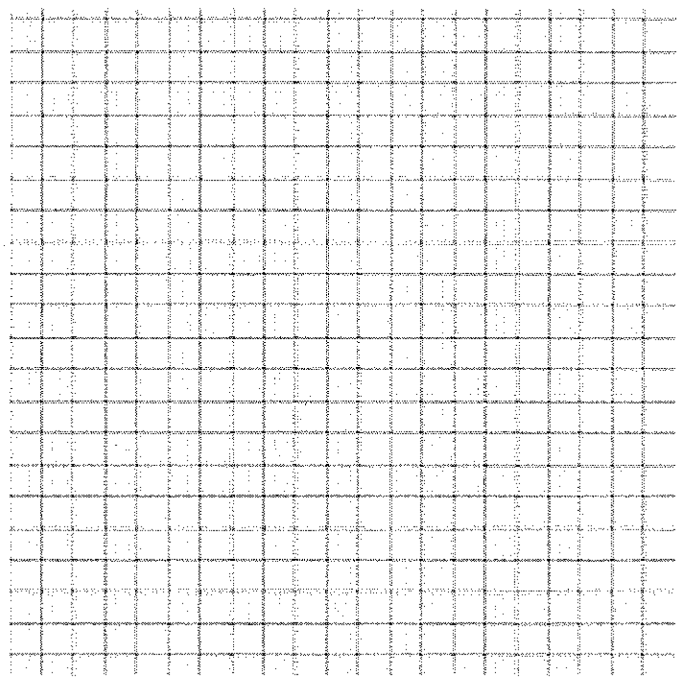
Une fonction quadratique est une fonction où x est au 2[e] degré. Elle prend deux formes :

Forme générale : $f(x) = ax^2 + bx + c$; où $a \neq 0$
Forme canonique : $f(x) = a(x - p)^2 + q$; où $a \neq 0$

N.B. Les variables « p » et « q » sont parfois remplacées par les variables « h » et « k », respectivement.

La représentation graphique d'une fonction quadratique

Ex. 1 Dessine le graphique de la fonction $f(x) = x^2$



Le graphique d'une fonction quadratique est une **parabole**, une courbe symétrique en forme de « U », ouverte vers le haut ou le bas.

- Les coordonnées du **sommet** correspondent au point de retournement de la parabole.
- Lorsque la parabole s'ouvre vers le haut, sa **valeur minimum**, correspond à la valeur de y à son sommet. Lorsque la parabole s'ouvre vers le bas, sa **valeur maximum**, correspond à la valeur de y à son sommet.

- Une droite verticale traversant le sommet et divisant la parabole en deux parties congruente est **l'axe de symétrie**. L'abscisse du sommet (x) définit son équation.
- Les **zéros** (racines ou abscisses à l'origine) sont les valeurs de x qui annulent la fonction. C'est-à-dire, les valeurs de x lorsque la parabole touche ou traverse l'axe des x.
- L'**ordonnée à l'origine** est la valeur de y lorsque la parabole touche ou traverse l'axe des y.

Rappel : Lorsque les coordonnées à l'origine sont demandées, on doit déterminer l'ordonnée à l'origine ($y=$ ...) ET la ou les abscisse(s) à l'origine ($x=$ ...).

- Le **domaine** est l'ensemble de toutes les valeurs possibles de $\underline{x}$ de la fonction.
- L'**image** est l'ensemble de toutes les valeurs possibles de $\underline{y}$ de la fonction. L'image sera toutes les valeurs supérieures au minimum de la fonction OU toutes les valeurs inférieures au maximum de la fonction.

Ex. 2 Indique les propriétés suivantes du graphique $f(x) = x^2$.

Les coordonnées du sommet : ____________________

Direction de l'ouverture : ____________________

Maximum ou minimum : ____________________

Axe de symétrie : ____________________

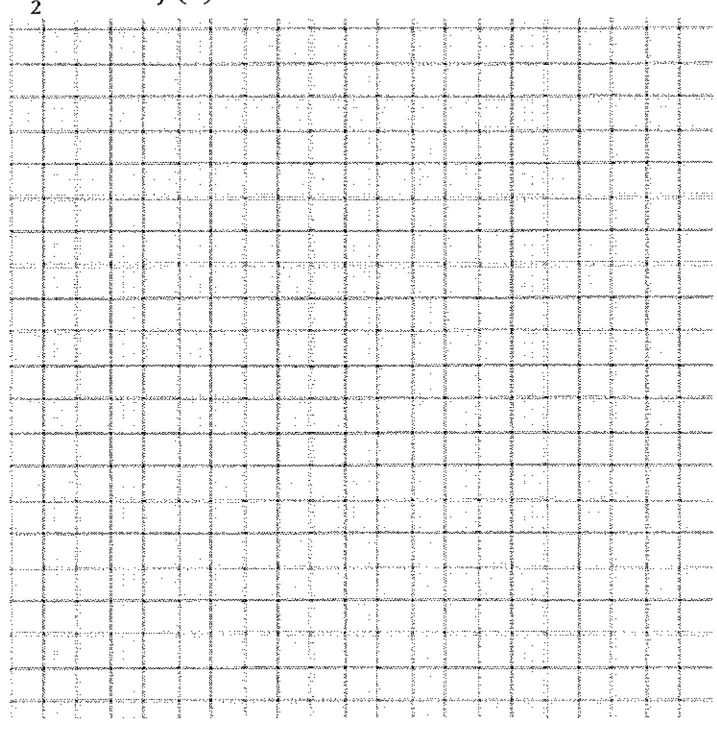
Zéros/racines/abscisses à l'origine : ____________________

L'ordonnée à l'origine : ____________________

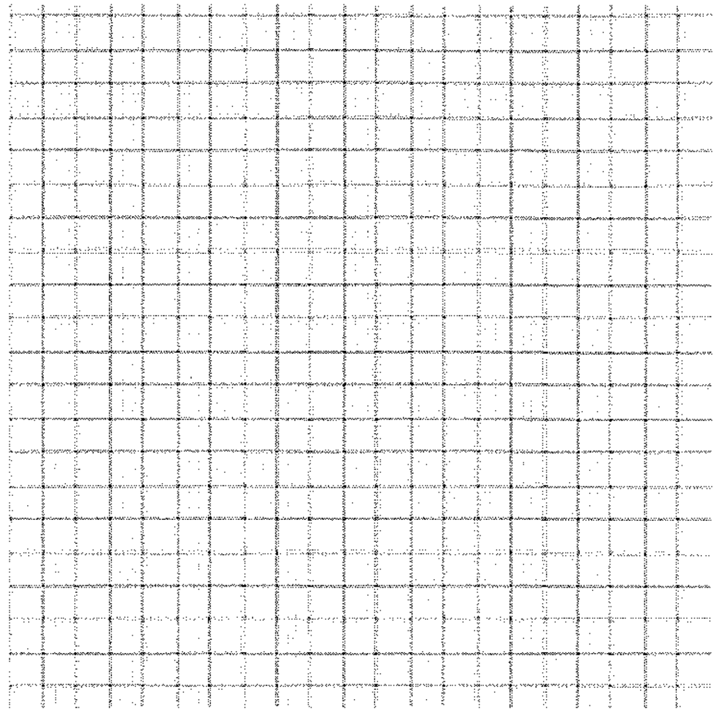
Domaine : ____________________

Image : ____________________

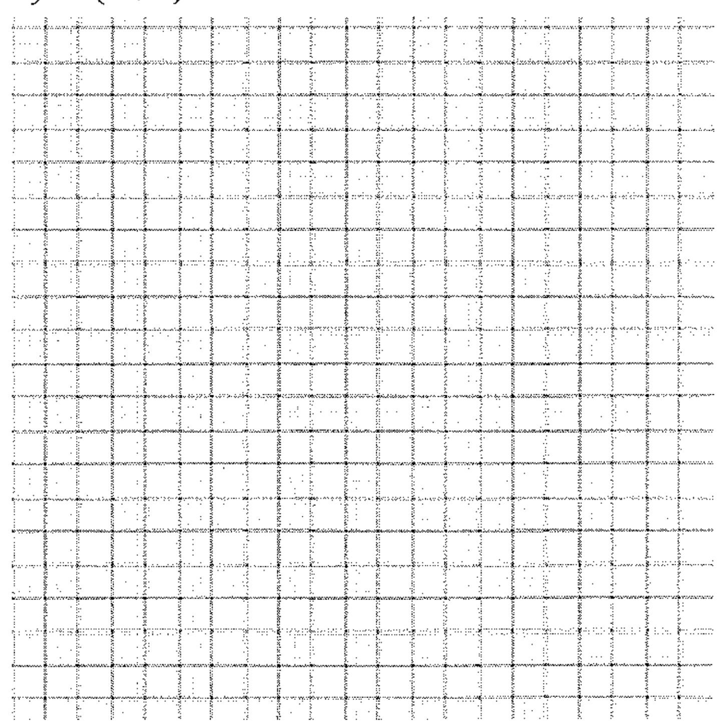
Ex. 3 Dessine les graphiques des fonctions quadratiques suivantes dans le même plan cartésien : $f(x) = -x^2$ $y = \frac{1}{2}x^2$ $f(x) = 2x^2$



Ex. 4 Dessine les graphiques des fonctions quadratiques suivantes dans le même plan cartésien : $f(x) = x^2 + 2$ $y = x^2 - 3$



Ex. 5 Dessine les graphiques des fonctions quadratiques suivantes dans le même plan cartésien : $f(x) = (x-2)^2$ $y = (x+1)^2$



Ex. 6 Identifie les propriétés des graphiques ci-dessus.

$f(x) = -x^2$		$y = \frac{1}{2}x^2$	
Les coordonnées du sommet :		Les coordonnées du sommet :	
Direction de l'ouverture :		Direction de l'ouverture :	
Maximum ou minimum :		Maximum ou minimum :	
Axe de symétrie :		Axe de symétrie :	
Zéros/racines/abscisses à l'origine :		Zéros/racines/abscisses à l'origine :	
L'ordonnée à l'origine :		L'ordonnée à l'origine :	
Domaine :		Domaine :	
Image :		Image :	

$f(x) = 2x^2$		$y = x^2 + 2$	
Les coordonnées du sommet :		Les coordonnées du sommet :	
Direction de l'ouverture :		Direction de l'ouverture :	
Maximum ou minimum :		Maximum ou minimum :	
Axe de symétrie :		Axe de symétrie :	
Zéros/racines/abscisses à l'origine :		Zéros/racines/abscisses à l'origine :	
L'ordonnée à l'origine :		L'ordonnée à l'origine :	
Domaine :		Domaine :	
Image :		Image :	

$y = x^2 - 3$		$f(x) = (x - 2)^2$	
Les coordonnées du sommet :		Les coordonnées du sommet :	
Direction de l'ouverture :		Direction de l'ouverture :	
Maximum ou minimum :		Maximum ou minimum :	
Axe de symétrie :		Axe de symétrie :	
Zéros/racines/abscisses à l'origine :		Zéros/racines/abscisses à l'origine :	
L'ordonnée à l'origine :		L'ordonnée à l'origine :	
Domaine :		Domaine :	
Image :		Image :	

$y = (x + 1)^2$	
Les coordonnées du sommet :	
Direction de l'ouverture :	
Maximum ou minimum :	
Axe de symétrie :	
Zéros/racines/abscisses à l'origine :	
L'ordonnée à l'origine :	
Domaine :	
Image :	

Quel est l'effet de a, p et q sur chacun des graphiques?

Comment a, p et q ont affecté le sommet? Où se retrouve le sommet de la fonction $f(x) = a(x-p)^2 + q$?

Comment la direction de l'ouverture de la parabole peut-elle être déterminée?

Comment a, p et q ont affecté le domaine et l'image? Quels sont le domaine et l'image de la fonction $f(x) = a(x-p)^2 + q$?

Comment a, p et q ont affecté l'axe de symétrie? Quelle est l'axe de symétrie de la fonction $f(x) = a(x-p)^2 + q$?

Comment a, p et q ont affecté la distance entre le sommet et les autres coordonnées de la fonction?

Ex. 7 Dessine le graphique de la fonction $y = \frac{1}{3}(x-5)^2 - 4$ et détermine ses propriétés.

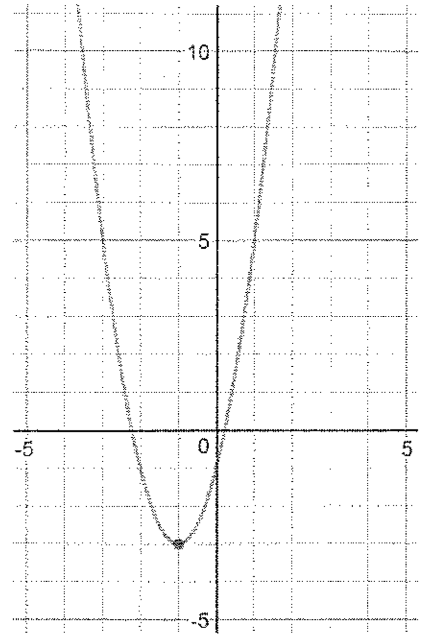
Sommet :	
Direction de l'ouverture :	
Maximum ou minimum :	
Axe de symétrie :	
Zéros :	
L'ordonnée à l'origine :	
Domaine :	
Image :	

Exercice 1

Déterminer la fonction selon le graphique

Ex. 8 Détermine l'équation de la fonction représentée suivante.

Indice : Il faut trouver les valeurs de a, p et q pour compléter l'équation $y = a(x - p)^2 + q$



Il existe deux méthodes : algébriquement par substitution ou par comparaison.

Par substitution, il suffit d'utiliser les coordonnées du sommet et un point de la parabole. Les coordonnées du sommet remplace les variables p et q et les coordonnées de l'autre point remplace les variables x et y de l'équation. Il faut simplement résoudre pour a.

Par comparaison, on doit déterminer des valeurs des variables en comparant la parabole à la parabole de base, $f(x) = x^2$. Généralement, la distance entre le sommet et la prochaine coordonnée est de 1 unité à la droite et 1 unité vers le haut. Ce rapport indique la valeur de a. Comme d'habitude, les valeurs de p et q correspondent aux coordonnées du sommet.

À ton tour (Manuel, pg 153)

On peut déterminer le nombre de zéros en regardant aux valeurs de a et q.

À ton tour (pg 154)

Manuel, (pg158) #8ab et 9bd

B. Compléter le carré

En algèbre, on complète le carré pour aider à résoudre un problème. La fonction quadratique sous la forme générale est $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut être transformée à la forme canonique $f(x) = a(x - p)^2 + q$, en **complétant le carré**. L'expression quadratique est un carré complet et on l'appelle un **trinôme carré parfait**. Un trinôme carré parfait en est un qui nous permet de simplifier l'expression de $ax^2 + bx + c$ à une de la forme de $a(x - p)^2$.

Ex. 8 Développe les expressions suivantes : $(x - 2)^2, (x + 5)^2, et\ (x + n)^2$. Que remarques-tu ?

La complétion du carré peut se modéliser à l'aide de tuiles algébriques.

Ex. 9 Modélise x^2 à l'aide d'une tuile carrée dont le côté mesure x unités de longueur :

Modélise x à l'aide d'une tuile rectangulaire qui mesure x unités de longueur et 1 unité de largeur :

Modélise une constante à l'aide d'une tuile carrée dont le côté mesure 1 unité de longueur :

Forme un carré ayant 1 tuile x^2 , 4 tuiles x et 4 tuiles unitaires.

L'aire de ce carré est la somme des tuiles est : ______________________________.

Étant donné que la longueur d'un côté de ce carré est $x + 2$, on peut formuler l'aire comme étant $(x + 2)^2$. Ce modèle forme donc un carré complet.
De façon semblable, $(x + 2)^2$ s'appelle le **carré d'un binôme**. Dans un trinôme carré parfait, le carré de la moitié du coefficient de x ou $\left(\frac{4}{2}\right)^2$ est le terme constant 4.

Si $x^2 + bx + c$ est un trinôme carré parfait, alors $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = c$.

Ex. 10 Développe le carré pour trouver le sommet et l'équation de l'axe de symétrie pour la fonction quadratique $y = x^2 + 6x$.

Ex. 11 Exprime $f(x) = x^2 - 4x + 3$ sous la forme canonique et trouve la valeur maximum ou la valeur minimum.

Ex. 12 Trouve les coordonnées du sommet et l'équation de l'axe de symétrie de $y = 3x^2 + 12x + 16$.

Exercice 2

La forme générale d'une fonction quadratique, $f(x) = ax^2 + bx + c$, fournit les informations suivantes :

- « a » détermine la forme de la parabole et la direction de son ouverture ;
- « b » influe la position du graphique ; et
- « c » détermine l'ordonnée à l'origine du graphique.

Ex. 13 Compare les coefficients obtenus lorsqu'on développe la forme canonique à ceux de la forme générale.

Que remarque-t-on ?

Vérifie avec les fonctions de l'exemple 12.

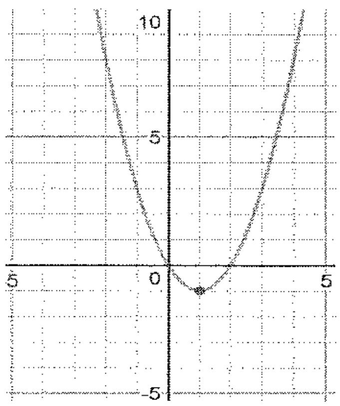
Ex. 14 Écris cette fonction sous forme canonique en complétant le carré et vérifie les coefficients : $f(x) = -20x^2 - 400x - 243$

Si $b = -2ap$ et $c = ap^2 + q$, on peut donc déterminer les coordonnées du sommet à partir de la fonction générale.

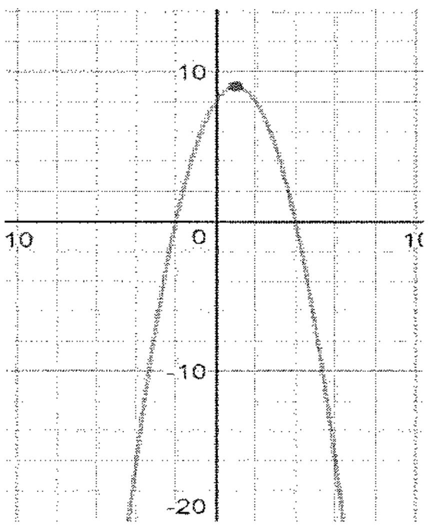
Les graphiques des fonctions quadratiques de forme générale sont identiques à celle de forme canonique.

Ex. 15 Pour chaque graphique, détermine : la direction de l'ouverture, les coordonnées du sommet, la valeur max/min, l'équation de l'axe de symétrie, les coordonnées à l'origine, le domaine, l'image et l'équation de la fonction (sous forme générale).

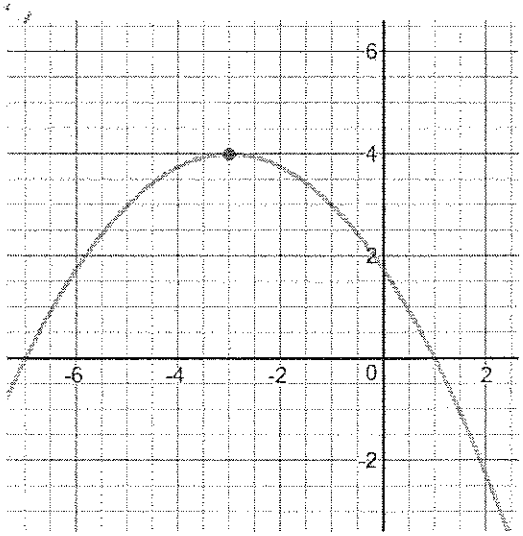
a)



b)



c)



Page 174 : #2ab, 6bc, 8 et 9

C. **Résolution de problèmes**

On peut examiner des situations de vie courantes qu'on peut modéliser à l'aide de fonctions quadratiques.

Ex. 15 Une arche parabolique a une largeur de 280 cm et une hauteur de 216 cm à son point le plus haut au-dessus du sol. Détermine la hauteur de l'arche en un point situé à 50cm de sa limite extérieure.

Ex. 16 Une plongeuse s'élance d'un tremplin de 3m à une vitesse initiale de 6,8 m/s. Sa hauteur, h, au-dessus de l'eau, en mètres, t secondes après avoir quitté le tremplin, peut être modélisée par la fonction $h(t) = -4{,}9t^2 + 6{,}8t + 3$.

a) Trace le graphique de la fonction.
b) Que représente l'ordonnée à l'origine?
c) Quelle est la hauteur maximale atteinte par la plongeuse? À quelle moment atteint-elle cette hauteur?
d) Après combien de temps la plongeuse fait-elle son entrée dans l'eau?
e) Quels sont le domaine et l'image appropriés dans ce contexte?
f) À quelle hauteur se trouve la plongeuse au bout de 0,6 s?

Ex. 17 Les organisateurs d'un festival veulent délimiter un espace rectangulaire. Ils ont 160m de corde pour former le périmètre.

a) Définis une fonction quadratique qui représente l'aire délimitée.
b) Quelles sont les coordonnées du sommet? Que représente le sommet dans ce contexte?
c) Représente graphiquement la fonction déterminée en a).
d) Détermine le domaine et l'image dans ce contexte.
e) Indique les suppositions que tu as faites.

Ex. 18 Une fermière doit construire un parc le long d'un grand bâtiment. Il y aura une clôture sur trois côtés du parc et le quatrième côté sera formé par le bâtiment. La fermière dispose de 90m de clôture. Quelles dimensions donneront la surface maximale?

Ex. 19 Un magasin d'équipement de sport vend des bouteilles réutilisables au prix de 8$. À ce prix, il en vend environ 100 par semaine. Selon une étude, pour chaque augmentation de 2$ du prix unitaire, le gérant du magasin peut s'attendre à vendre cinq bouteilles de moins. Quel prix de vente génèrera le revenu maximal?

Pg 159 #13 et 14; pg 176 #12 et 15; 195 #18 et 20

D. Les équations quadratiques

On peut résoudre des équations quadratiques :

- Graphiquement
- Algébriquement
- Avec des formules

Lorsqu'on résout une équation quadratique, on détermine la ou les valeurs de x étant donné une valeur de y.

Résolution par graphique

Ex. 20 Résous $x^2 + 4x + 2 = 2$ en traçant le graphique de la fonction correspondante. Vérifie les solutions.

On peut aussi résoudre l'équation en la transformant à la forme de $ax^2 + bx + c = 0$
Les solutions d'une fonction quadratique correspondante portent le nom de **racines**.
La nature des racines peut varier. Elles peuvent être réelles ou non réelles.
Les racines réelles peuvent être :

- Une racine double : deux racines réelles identiques Ex. $x = 2$
- Deux racines distinctes : deux racines réelles différentes Ex. $x = -2$ et $x = 5$

Pour trouver les racines d'une équation quadratique, on peut déterminer les abscisses à l'origine ou zéros en traçant le graphique de la fonction correspondante.

Ex. 21 Détermine les racines de l'équation quadratique $x^2 - 6x + 9 = 0$ en traçant le graphique de la fonction correspondante $f(x) = x^2 - 6x + 9$. Vérifie les solutions.

Ex. 22 Détermine les racines de l'équation quadratique $-x^2 + 2x + 8 = 0$ en traçant le graphique de la fonction correspondante. Vérifie les solutions.

Ex. 23 Résous l'équation $3x^2 - x + 2 = 0$ en traçant le graphique de la fonction correspondante. Vérifie les solutions.

Pg 215 : #3e, 8ab, 11

<u>Résoudre algébriquement</u>

Par factorisation

Pour résoudre une équation quadratique par factorisation, il faut s'assurer que l'équation soit égale à 0. Si le produit de deux facteurs est zéro, alors au moins un de ces facteurs doit être zéro. C'est-à-dire, si $(m)(n) = 0$, au moins un des termes m ou n vaut 0.

Les racines (ou solutions) d'une équation quadratique surviennent quand le produit de ses facteurs est égal à zéro.

Pour résoudre une équation quadratique de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, décompose l'expression en facteurs et pose qu'un des facteurs est égal à zéro.

Ex. 24 Résous $\frac{1}{2}x^2 - x - 4 = 0$.

Ex. 25 Résous $9x^2 - 24x + 16 = 0$.

Ex. 26 Résous $-2(x + 3)^2 + 12(x + 3) + 14 = 0$

Ex. 27 Détermine les racines de $2x^2 - 9x - 5 = 0$. Vérifie les solutions.

On peut utiliser les racines d'une équation quadratique pour faire la résolution de problèmes.

Ex. 28 La longueur d'un terrain de crosse extérieur mesure 10 m de moins que le double de sa largeur. Le terrain a une aire de 6600 m². Détermine les dimensions d'un terrain de crosse extérieur.

Pg 229: #1b, 2b, 4ac, 5b, 6b, 7be, 8be, 9bdf, 12a

En complétant le carré

Pour résoudre une équation quadratique de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, ou de la forme $a(x - p)^2 + q = 0$, on peut isoler le terme élevé au carré et extraire la racine carrée des deux membres de l'équation.
La racine carrée d'un nombre réel positif peut être positive ou négative; il y a donc deux solutions possibles.

Ex. 29 Résous et vérifie les solutions : $(x - 1)^2 - 49 = 0$.

Beaucoup d'équations quadratiques ne peuvent pas être résolues à l'aide de la décomposition en facteurs. De plus, la représentation graphique des fonctions correspondantes ne donne pas nécessairement des solutions exactes.

On peut utiliser la complétion du carré pour réécrire une fonction quadratique de la forme générale sous la forme canonique, afin de déterminer les solutions exactes d'équations quadratiques.

Ex. 30 Trouve les solutions de $p^2 - 4p = 11$. Vérifie les solutions.

Ex. 31 Détermine les racines de l'équation $-2x^2 - 3x + 7 = 0$, au centième près.

Ex. 32 La diagonale d'un téléviseur grand écran mesure 42 po. La largeur de l'écran mesure 16 po de plus que sa hauteur. Détermine les dimensions de l'écran, au dixième de po près.

Dans l'exemple précédent, la hauteur de l'écran ne peut pas être négative, $h = -36{,}6$. Donc elle est une **racine étrangère.** Elle est un nombre obtenu par la résolution d'une équation, mais qui ne satisfait pas les restrictions initiales de la variable (ou n'a pas de sens selon le contexte de la question).

Page 240 #6d, 7d, 9, 11, 13a

La formule quadratique et le discriminant

On peut résoudre des équations quadratiques de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, où $a \neq 0$, à l'aide de la formule quadratique :

$$\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Ex. 33 Détermine les racines de l'équation $3x^2 + 5x - 2 = 0$. Vérifie les solutions.

Ex. 34 Détermine les racines de l'équation $\frac{n^2}{2} - n - \frac{5}{2} = 0$. Indique les réponses au centième près.

On peut déterminer la nature des racines d'une équation quadratique à partir de la valeur du **discriminant**. Le discriminant est l'expression $b^2 - 4ac$ qui apparaît sous le radical dans la formule quadratique.

- Lorsque la valeur du discriminant est positive, $b^2 - 4ac > 0$, il y a deux racines réelles distinctes.
- Lorsque la valeur du discriminant est nulle, $b^2 - 4ac = 0$, il y a une racine réelle double (ou deux racines réelles identiques).
- Lorsque la valeur du discriminant est négative, $b^2 - 4ac < 0$, il n'y a aucune racine réelle.

Ex. 35 Utilise le discriminant pour déterminer la nature des racines de l'équation $3x^2 + 4x + \frac{4}{3} = 0$ Vérifie les réponses à l'aide de la formule quadratique.

Ex. 36 Une photo mesure 30 cm sur 21 cm. Julie découpe deux bandes de même largeur, l'une d'un côté de la photo et l'autre dans le haut. Cela réduit l'aire de la photo à 40% de son aire initiale. Détermine la largeur des bandes que Julie a découpées.

Page 254 #1f, 3f, 4f, 10, 11