Les fonctions inverses

Dans le cas d'une fonction, $f(x)$, son inverse est $\frac{1}{f(x)}$.
Étant donné que $y = f(x)$, il faut donc inverser seulement les valeurs de y dans la fonction.
Pour comprendre une fonction inverse, $\frac{1}{f(x)}$, on la compare à sa fonction de base, $f(x)$.

La fonction $y = x$ est une fonction linéaire. Son graphique est donc une droite. Sa fonction inverse, $y = \frac{1}{x}$, est une **fonction rationnelle**.

- Elle contient des asymptotes : une droite telle que la distance d'une courbe à cette droite tend vers zéro.
- Elle est composée de deux parties ou branches, qui sont aux côtés d'une asymptote verticale et d'une asymptote horizontale.
  - Une **asymptote verticale** (indiquée en ligne pointillée) est la valeur non permise du domaine de la fonction rationnelle (ou l'abscisse à l'origine de la fonction de base).
  - Une **asymptote horizontale** est définie par la valeur 0 parce qu'elle ne fait pas partie de l'image de la fonction.
- Le domaine inclura tous les nombres réels, sauf la valeur interdite identifiée par l'asymptote verticale.
- L'image inclura tous les nombres réels, sauf la valeur interdite identifiée par l'asymptote horizontale.
- Les **points invariants** sont les coordonnées que la fonction et sa fonction inverse ont en commun. On veut savoir quelle valeur de *x* correspond à $y = \pm 1$.

<u>Les inverses de fonctions linéaires</u>

Ex.1 Soit $f(x) = 2x + 5$.

a) Détermine la fonction inverse. $y = \frac{1}{2x+5}$

b) Quelles sont les équations de l'asymptote verticale et horizontale de la fonction inverse?

$2x + 5 = 0$ Étant donné que c'est impossible d'avoir un dénominateur égale à 0, y *ne pourrait pas* $= 0$

$Asymptote\ verticale: x = -\frac{5}{2}$ *et l'asymptote horizontale*: $y = 0$

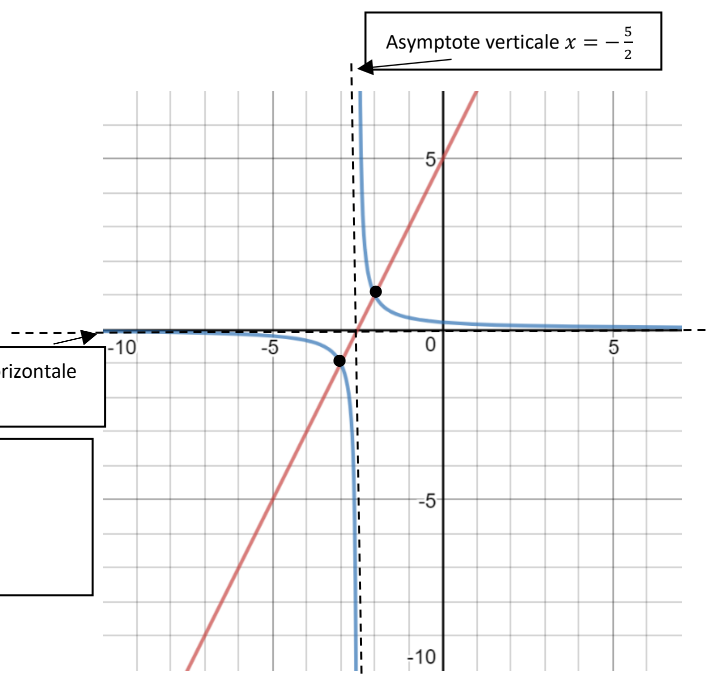
c) Détermine les coordonnées des points invariants. $y = 1, x = ?$ *et* $y = -1, x = ?$

$1 = 2x + 5$	$-1 = 2x + 5$
$-4 = 2x$	$-6 = 2x$
$-2 = x$	$-3 = x$
$(-2, 1)$	$(-3, -1)$

d) Traces les deux fonctions.

$y = 2x + 5 \;\; m = 2\ et\ o.o.y = 5$

x	$f(x)$	$\frac{1}{f(x)}$
-4	-3	$-\frac{1}{3}$
-3	-1	-1
-2	1	1
-1	3	$\frac{1}{3}$
0	5	$\frac{1}{5}$
1	7	$\frac{1}{7}$



$\frac{1}{f(x)}$:
Domaine : $\left\{x \epsilon \mathbb{R} \middle| x \neq -\frac{5}{2}\right\}$
Image : $\{y \epsilon \mathbb{R} | y \neq 0\}$

Les inverses de fonctions quadratiques

Dans le cas des inverses d'une fonction quadratique, il faut décomposer la fonction quadratique en ses facteurs pour trouver la ou les valeurs interdites. Ces valeurs feront en sorte que le dénominateur de la fonction inverse sera égal à zéro, qui n'est pas permis. Il y a donc, deux asymptotes verticales pour l'inverse d'une fonction quadratique.

Pour tracer les graphiques d'une fonction quadratique et sa fonction inverse :

- Calcule l'abscisse à l'origine de la fonction quadratique
- Calcule les points invariants en mettant la fonction quadratique égale à ± 1.
- Calcule l'ordonnée à l'origine de la fonction quadratique.
- Détermine les coordonnées du sommet de la fonction quadratique.
- Dans ton plan cartésien, trace les asymptotes verticales (avec des lignes pointillées).
- Trace la parabole correspondant à la fonction quadratique, identifiant les points invariants.
- Choisis quelques valeurs à chaque côté de l'asymptote verticale et inverse-les.
- Dessine la fonction inverse.

Ex.2 Soit $f(x) = x^2 + x - 6$

La fonction inverse de *f*(*x*) est $y = \frac{1}{x^2+x-6}$

Les asymptotes verticales de la fonction inverse sont les abscisses à l'origine de $f(x)$.

$$0 = x^2 + x - 6$$
$$0 = (x+3)(x-2)$$
$$Les\ asymptotes\ verticales\ sont\ x = -3\ et\ x = 2$$

Les points invariants : *transforme la fonction quadratique en forme canonique*

$x^2 + x - 6 = y$

$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - 6\frac{1}{4} = y$ *Le sommet de* $f(x)$ *est* à $\left(-\frac{1}{2}, -6\frac{1}{4}\right)$

Le sommet de $\frac{1}{f(x)}$ *est* à $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{-6\frac{1}{4}}\ ou\ \frac{-4}{25}\right)$

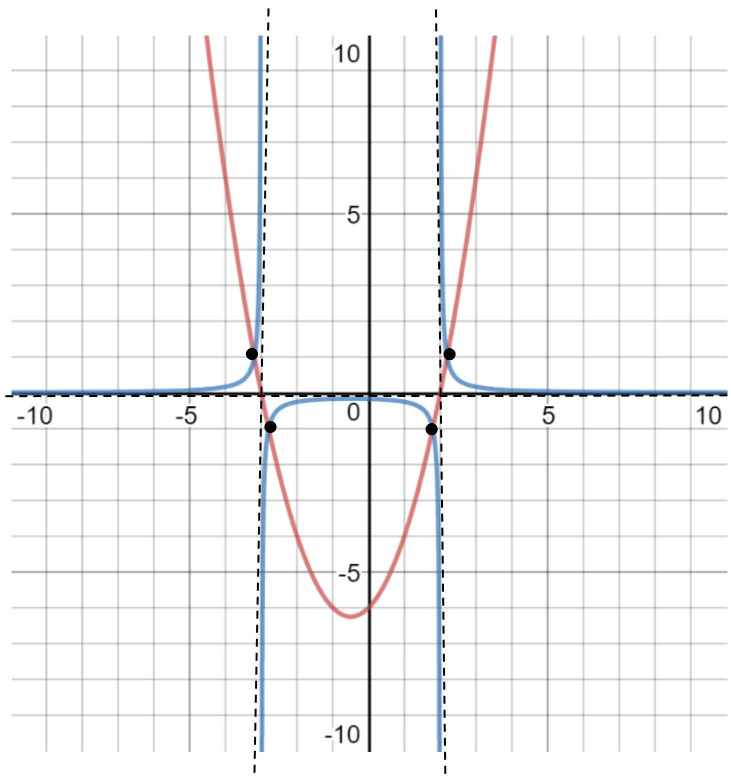
$y = 1, x = ?$
$1 = (x+\frac{1}{2})^2 - 6\frac{1}{4}$
$\sqrt{7\frac{1}{4}} = \sqrt{(x+\frac{1}{2})^2}$
$\pm 2{,}69 \ldots = x + \frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2} \pm 2{,}69 \ldots = x$
$x \approx 2{,}2\ et\ x \approx -3{,}2$
$(2{,}2\ , 1)\ et\ (-3{,}2\ , 1)$

$y = -1, x = ?$
$-1 = (x+\frac{1}{2})^2 - 6\frac{1}{4}$
$\sqrt{5\frac{1}{4}} = \sqrt{(x+\frac{1}{2})^2}$
$\pm 2{,}29 \ldots = x + \frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2} \pm 2{,}29 \ldots = x$
$x \approx 1{,}8\ et\ x \approx -2{,}8$
$(1{,}8\ , -1)\ et\ (-2{,}8\ , -1)$

L'ordonnée à l'origine de la fonction inverse :
$f(x) = x^2 + x - 6$
$f(x) = (0)^2 + (0) - 6$
$f(x) = -6$ *Donc l'ordonnée à l'origine de* $\frac{1}{f(x)}$ *est* $y = -\frac{1}{6}$

Si on voulait déterminer l'abscisse à l'origine de la fonction inverse : $0 = \frac{1}{x^2+x-6}$
Aucune valeur de x *rend cette équation vraie. C'est pourquoi il y a une asymptote horizontale.*

Trace les graphiques



Exercice (pg 403) : 2ad; 3bd; 5bd; 6ac; 7a; 8c; 9; 10; 11