Les expressions et les équations rationnelles

A. **Les expressions rationnelles**
B. **Multiplier et diviser les expressions rationnelles**
C. **Additionner et soustraire les expressions rationnelles**
D. **Les équations rationnelles**

A. Les expressions rationnelles

Une **expression rationnelle** est une fraction algébrique dont le numérateur, le dénominateur ou les deux sont des polynômes.

Ex. $\frac{3x}{x-4}, x \neq 4$ et $\frac{x+2}{x+3}, x \neq -3$

Chaque fois qu'on utilise une expression rationnelle, on doit déterminer les valeurs à exclure de la ou les variables, appelées les **valeurs non permises** ou **valeurs interdites**. Ces valeurs sont toutes celles qui rendent le dénominateur égal à zéro.

Ex. Soit $\frac{3x}{x-4}$, si $x = 4$, le dénominateur serait égale à 0.

Pour déterminer les valeurs non permises, pose le dénominateur égal à zéro et résous l'équation.

Ex. Détermine la ou les valeurs non permises.

$\frac{4x}{3yz}$ $\quad 3yz = 0 \quad y \neq 0 \; et \; z \neq 0$

$\frac{x-1}{(x+2)(x-3)}$ $\quad x + 2 = 0 \; et \; x - 3 = 0 \quad x \neq -2 \; et \; 3$

$\frac{2x^2}{x^2-4} \rightarrow \frac{2x^2}{(x-2)(x+2)}$ $\quad x + 2 = 0 \; et \; x - 2 = 0 \quad x \neq \pm 2$

On peut multiplier ou diviser une expression rationnelle par 1 sans changer sa valeur. Ce qui permet d'obtenir une **expression rationnelle équivalente**.

Ex. $\frac{3x}{x-4} \cdot \frac{x}{x} = \frac{3x^2}{x^2-4x}$ Ces expressions sont équivalentes.

$\frac{3x^2+6x}{x^2-2x-8} \rightarrow \frac{(3x)\cancel{(x+2)}}{(x-4)\cancel{(x+2)}} \rightarrow \frac{3x}{x-4}; x \neq -2 \; et \; 4$

On peut simplifier une expression rationnelle la même façon qu'on simplifie un nombre rationnel. Divise le numérateur et le dénominateur par les facteurs qu'ils ont en commun. Quand une expression rationnelle est sous forme irréductible (sa forme sa plus simple), le numérateur et le dénominateur n'ont pas de facteur commun autre que 1.

Ex. $\frac{2x^2+x-10}{x^2+3x-10} = \frac{(2x+5)\cancel{(x-2)}}{(x+5)\cancel{(x-2)}}$

$\frac{2x+5}{x+5}; x \neq -5 \; et \; 2$

Ex. $\frac{6-2x}{x^2-9} = \frac{2(3-x)}{(x+3)(x-3)}$

$\frac{2(-1)\cancel{(-3+x)}}{(x+3)\cancel{(x-3)}}$

$\frac{-2}{x+3}; x \neq \pm 3$

Ex. $\frac{1-x}{x^2-1} = \frac{-x+1}{(x+1)(x-1)}$

$\frac{-1\cancel{(x-1)}}{(x+1)\cancel{(x-1)}}$

$\frac{-1}{x+1}; x \neq \pm 1$

Exercice 1: (pg 317) #1bdf, 4bdf, 6ac, 8ace, 13, 26b

B. Multiplier et diviser les expressions rationnelles

- Quand on multiplie des expressions rationnelles, on effectue les mêmes étapes que dans la multiplication de nombres rationnels (fractions).
- C'est-à-dire, on multiplie les numérateurs ensemble et les dénominateurs ensemble.
- Voici les étapes pour multiplier les expressions rationnelles :
  - Décompose chaque numérateur et chaque dénominateur en facteurs.
  - Détermine les valeurs non permises (toutes les valeurs des variables qui rendent le dénominateur égal à zéro sont des valeurs non permises du début à la fin).
  - Divise le numérateur et le dénominateur par leurs facteurs communs pour simplifier l'expression.

Ex. $\frac{8}{9} \cdot \frac{3}{20} = \frac{(2)\cancel{(2)}\cancel{(2)}\cancel{(3)}}{(3)\cancel{(3)}\cancel{(2)}\cancel{(2)}(5)}$

$\frac{2}{15}$

Ex. $\frac{x^2-9}{y^3-y} \cdot \frac{y^2-y}{x+3} = \frac{(x+3)(x-3)}{(y)(y^2-1)} \cdot \frac{(y)(y-1)}{x+3}$

$\frac{\cancel{(x+3)}(x-3)}{\cancel{(y)}(y+1)\cancel{(y-1)}} \cdot \frac{\cancel{(y)}\cancel{(y-1)}}{\cancel{(x+3)}}$

$\frac{x-3}{y+1}; x \neq -3\ et\ y \neq 0\ et\ \pm 1$

- Quand on divise des expressions rationnelles, on effectue les mêmes étapes que dans la division de nombres rationnels (fractions). C'est-à-dire, on fait l'inverse de la deuxième expression rationnelle et on multiplie les expressions.
- Voici les étapes pour diviser des expressions rationnelles :
  - Inverser le diviseur (2^e expression)
  - Décomposer en facteurs
  - Simplifier
  - Multiplier
  - Simplifier
  - Identifier les valeurs non permises (de TOUS les dénominateurs)

Ex. $\frac{x^2-6x-7}{x^2-49} \div \frac{x^2+8x+7}{x^2+7x} = \frac{x^2-6x-7}{x^2-49} \cdot \frac{x^2+7x}{x^2+8x+7}$

$\frac{\cancel{(x-7)}\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+7)}\cancel{(x-7)}} \cdot \frac{(x)\cancel{(x+7)}}{(x+7)\cancel{(x+1)}}$

$\frac{x}{x+7}; x \neq \pm 7;\ -1\ et\ 0$

Ex. $\frac{3x+12}{3x^2-5x-12} \div \frac{12}{3x+4} \cdot \frac{2x-6}{x+4} = \frac{\cancel{(3)}\cancel{(x+4)}}{\cancel{(3x+4)}\cancel{(x-3)}} \cdot \frac{\cancel{(3x+4)}}{\cancel{(3)}\cancel{(2)}(2)} \cdot \frac{\cancel{(2)}\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x+4)}}$

$\frac{1}{2}; x \neq -4; \frac{-4}{3}\ et\ 3$

Exercice 2 : (pg 327) #1b, 2bd, 4b, 8bd, 9

C. Additionner et soustraire les expressions rationnelles

Pour additionner ou soustraire des expressions rationnelles, il faut suivre les mêmes étapes que pour additionner et soustraire des nombres rationnels.

Si les dénominateurs sont identiques:

- Mets les numérateurs ensemble sur le dénominateur;
- Additionne ou soustrais les numérateurs;
- Simplifie les expressions;
- Indique toutes les valeurs non permises.

Ex. $\frac{m}{n} - \frac{(m+1)}{n} = \frac{m-m-1}{n}$

$\frac{-1}{n}; n \neq 0$

Ex. $\frac{10m-1}{4m-3} - \frac{(8-2m)}{4m-3} = \frac{10m-1-8+2m}{4m-3}$

$\frac{12m-9}{4m-3}$

$\frac{3\,\cancel{(4m-3)}}{\cancel{4m-3}}$

$3; m \neq \frac{3}{4}$

Les dénominateurs sont différents:

Pour additionner ou soustraire les nombres rationnels, ils DOIVENT avoir un dénominateur commun.

- Décompose chaque expression en facteurs;
- Choisis un dénominateur commun (n'importe quel, mais le plus petit dénominateur commun (PPDC) est le plus facile);
- Multiplie chaque expression par l'expression manquante du dénominateur commun;
- Mets les numérateurs ensemble sur le dénominateur commun;
- Additionne ou soustrais les numérateurs;
- Simplifie les expressions;
- Indique toutes les valeurs non permises.

Ex. $\frac{1}{2} + \frac{3}{5}$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{2}$

$\frac{5}{10} + \frac{6}{10}$

$\frac{11}{10}$

> PPDC : 10
>
> $\frac{1}{2}$ manque le facteur (5) pour avoir le PPDC
>
> $\frac{3}{5}$ manque le facteur (2) pour avoir le PPDC
>
> On additionne que les numérateurs et simplifie l'expression si possible.

Ex. $\frac{4}{p^2-1} + \frac{3}{p+1} = \frac{4}{(p+1)(p-1)} + \frac{3}{p+1}$

PPDC : $(p+1)(p-1)$

$\frac{3}{p+1}$ $manque\ le\ facteur\ \ (p-1)\ pour\ avoir\ le\ PPDC$

$\frac{4}{(p+1)(p-1)} + \frac{3}{(p+1)} \cdot \frac{(p-1)}{(p-1)}$

$\frac{4+3p-3}{(p+1)(p-1)}$

$\frac{3p+1}{(p+1)(p-1)}; p \neq \pm 1$

Ex. $\frac{x-1}{x^2+x-6} - \frac{x-2}{x^2+4x+3} = \frac{x-1}{(x+3)(x-2)} - \frac{x-2}{(x+3)(x+1)}$

PPDC : $(x+3)(x-2)(x+1)$

$\frac{x-1}{(x+3)(x-2)}$ $manque\ (x+1)\ pour\ avoir\ le\ PPDC$

$\frac{x-2}{(x+3)(x+1)}$ $manque\ (x-2)\ pour\ avoir\ le\ PPDC$

$\frac{x-1}{(x+3)(x-2)} \cdot \frac{(x+1)}{(x+1)} - \frac{x-2}{(x+3)(x+1)} \cdot \frac{(x-2)}{(x-2)}$

$\frac{x^2-1-(x^2-4x+4)}{(x+3)(x-2)(x+1)}$

$\frac{x^2-x^2+4x-1-4}{(x+3)(x-2)(x+1)}$

$\frac{4x-5}{(x+3)(x-2)(x+1)}; x \neq -3, -1\ et\ 2$

Exercice 3 (pg 336): 3b, 4, 5ace, 6ace, 7ac, 8, 10b, 20

D. Les équations rationnelles

Une **équation rationnelle** est une équation qui contient au moins une expression rationnelle. Elle permet de résoudre différents types de problèmes.

Ex. $x = \frac{x-3}{x+1}$

Ex. $\frac{x}{4} - \frac{7}{x} = 3$

Pour résoudre une équation rationnelle :

- Décompose chaque dénominateur en facteurs ;
- Détermine les valeurs non permises ;
- Détermine le PPDC ;
- Multiplie les deux membres de l'équation par le PPDC pour <u>éliminer les dénominateurs ;</u>
- Isole la variable dans un membre de l'équation pour déterminer sa/ses valeur(s) ;
- Vérifie la/les réponse(s).

N.B. Il est important de remarquer que les valeurs non permises sont déterminées à partir de l'équation initiale et qu'elles ne peuvent pas être des solutions de l'équation finale.

Ex. Résous : $\frac{9}{y-3} - \frac{4}{y-6} = \frac{18}{y^2-9y+18}$

PPDC : $(y-3)(y-6)$

$y \neq 3 \ et\ 6$

$\frac{9}{y-3} - \frac{4}{y-6} = \frac{18}{(y-3)(y-6)}$

$\frac{9}{\cancel{y-3}} \cdot \cancel{(y-3)}(y-6) - \frac{4}{\cancel{y-6}} \cdot (y-3)\cancel{(y-6)} = \frac{18}{\cancel{(y-3)(y-6)}} \cdot \cancel{(y-3)(y-6)}$

$9(y-6) - 4(y-3) = 18$

$9y - 54 - 4y + 12 = 18$

$5y = 18 + 54 - 12$

$5y = 60$
$y = 12$

Vérification :

CG	CD
$\frac{9}{y-3} - \frac{4}{y-6}$	$\frac{18}{y^2-9y+18}$
$\frac{9}{(12)-3} - \frac{4}{(12)-6}$	$\frac{18}{(12)^2-9(12)+18}$
$1 - \frac{4}{6}$	$\frac{18}{144-108+18}$
$\frac{6}{6} - \frac{4}{6}$	$\frac{18}{54}$
$\frac{2}{6}\ ou\ \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

$y = 12$ La solution est valide.

Ex. Résous : $\frac{3x}{x+2} - \frac{5}{x-3} = \frac{-25}{x^2-x-6}$

PPDC : $(x-3)(x+2)$

$x \neq -2 \ et\ 3$

$\frac{3x}{x+2} - \frac{5}{x-3} = \frac{-25}{(x-3)(x+2)}$

$\frac{3x}{\cancel{x+2}} \cdot (x-3)\cancel{(x+2)} - \frac{5}{\cancel{x-3}} \cdot \cancel{(x-3)}(x+2) = \frac{-25}{\cancel{(x-3)(x+2)}} \cdot \cancel{(x-3)(x+2)}$

$3x(x-3) - 5(x+2) = -25$
$3x^2 - 9x - 5x - 10 + 25 = 0$
$3x^2 - 14x + 15 = 0$
$(3x-5)(x-3) = 0$
$x = \frac{5}{3}\ ou\ 1\frac{2}{3}$ et $x = 3 \Leftarrow x \neq 3\ car\ c'est\ une\ valeur\ non\ permise; racine\ étrangère$

Vérification :

CG	CD
$\frac{3x}{x+2} - \frac{5}{x-3}$	$\frac{-25}{x^2 - x - 6}$
$\frac{3(\frac{5}{3})}{\frac{5}{3}+2} - \frac{5}{\frac{5}{3}-3}$	$\frac{-25}{(\frac{5}{3})^2 - \frac{5}{3} - 6}$
$\frac{5}{\frac{11}{3}} - \frac{5}{\frac{-4}{3}}$	$\frac{-25}{\frac{25}{9} - \frac{23}{3}}$
$\frac{15}{11} - \frac{-15}{4}$	$\frac{-25}{\frac{-44}{9}}$
$\frac{225}{44}$	$\frac{225}{44}$

La solution $x = \frac{5}{3}$ est juste.

Ex. Une course de chiens entre The Pas et Flin Flon a une distance aller-retour de 140 mi. Une tempête oblige à l'équipage gagnant à réduire sa vitesse moyenne de 6 mi/h pour le retour. La course dure 8,5 h en tout pour cet équipage. Quelle est sa vitesse moyenne au cours de l'aller à Flin Flon ?

$$Rappel\ (sciences\ nat\ 20F): vitesse = \frac{distance}{temps}\ et\ temps = \frac{distance}{vitesse}$$

$$x = vitesse\ moyenne$$

	Distance (mi)	Vitesse (mi/h)	Temps (h)
ALLER	*70*	x	$\frac{70}{x}$
RETOUR	*70*	$x-6$	$\frac{70}{x-6}$
TOTAL	*140*	------------------	*8,5*

PPDC : $(x)(x-6)$

$x \neq 0\ et\ 6$

Temps aller + temps retour = 8,5 h

$$\frac{70}{x} + \frac{70}{x-6} = 8{,}5$$

$$\frac{70}{\cancel{x}} \cdot (\cancel{x})(x-6) + \frac{70}{\cancel{x-6}} \cdot (x)\cancel{(x-6)} = 8{,}5\,(x)(x-6)$$

$70(x-6) + 70x = 8{,}5(x^2 - 6x)$

$70x - 420 + 70x = 8{,}5x^2 - 51x$

$0 = 8{,}5x^2 - 191x + 420$

$a = 8{,}5 \quad b = -191 \quad c = 420$

$x = \frac{-(-191) \pm \sqrt{(-191)^2 - 4(8,5)(420)}}{2(8,5)}$

$x = \frac{191 \pm \sqrt{22201}}{17}$

$x = \frac{191 \pm 149}{17}$

$x = 20\ et;$

$x = \frac{42}{17}\ ou\ {\sim}2,47\ Cette\ valeur\ est\ une\ racine\ étrangère\ car\ on\ aurait\ une\ vitesse\ négative.$

Vérification :

CG	CD
$\frac{70}{x} + \frac{70}{x-6}$ $\frac{70}{(20)} + \frac{70}{(20)-6}$ $\frac{7}{2} + \frac{70}{14}$ $\frac{7}{2} + 5$ $8,5$	$8,5$

La vitesse moyenne de l'équipage gagnant est $20\ mi/h$.

Exercice 4 (pg 349) : 2b, 3b, 6b, 8, 13 et 14