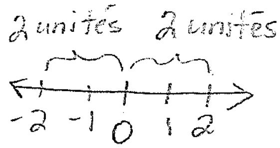
<u>Les fonctions valeur absolue</u>

A. La valeur absolue
B. Les fonctions valeur absolue
C. Les équations valeur absolue

A. La valeur absolue

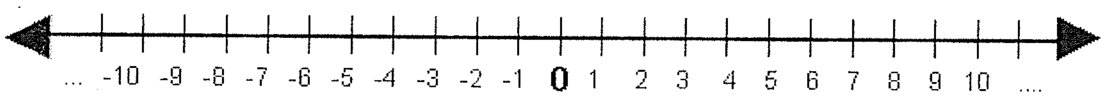
La **valeur absolue** d'un nombre réel, a, est notée $|a|$ et est un nombre positif. Deux barres verticales autour d'un nombre ou une expression représentent la valeur absolue.

En général, la valeur absolue d'un nombre réel a est donnée par :
$$\lvert a \rvert = \begin{cases} a \text{ si } a \geq 0 \\ -a \text{ si } a < 0 \end{cases}$$



$|-2| = 2$ $|2| = 2$

La valeur absolue d'un nombre positif est ce même nombre positif.
Ex. $|+2| = 2$
La valeur absolue de zéro est zéro. Ex. $|0| = 0$
La valeur absolue d'un nombre négatif est égale à -1 fois ce nombre.
Ex. $|-2| = (-1)(-2)$
$= 2$
La valeur absolue peut aussi servir à représenter la distance entre un nombre réel et zéro sur une droite numérique.



On peut aussi évaluer des expressions contenant des valeurs absolues.

Ex.1 $|-4| - |-3|$

$4 - 3$

1

Ex. 2 $|-12 + 8|$

$|-4|$

4

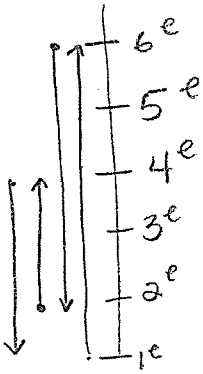
Ex. 3 $|12(-3) + 5^2|$

$|-36 + 25|$

$|-11|$

11

Ex. 4 Alex prend l'ascenseur du rez-de-chaussée (1e étage) d'un hôpital jusqu'au 6e étage. Il va ensuite au 2e étage et après au 4e étage, puis fini au rez-de chaussée. Quel est le total des déplacements d'Alex ce jour-là?



$1^e \to 6^e$ $6^e \to 2^e$ $2^e \to 4^e$ $4^e \to 1^e$

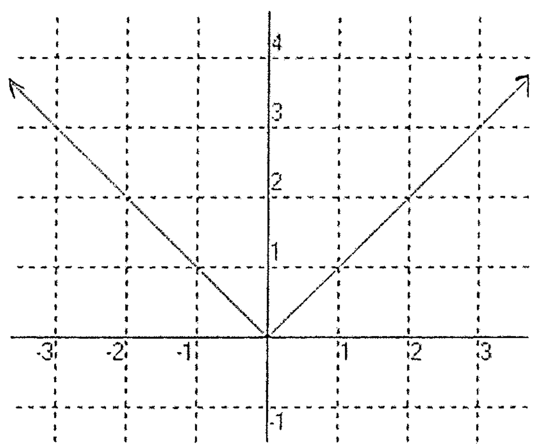
$|+5|$ $|-4|$ $|+2|$ $|-3|$

$5 + 4 + 2 + 3 = 14$ étages

Exercice (pg 363) : #3, 6 et 8

B. Les fonctions valeur absolue

Une **fonction valeur absolue** est une fonction où une inconnue apparaît à l'intérieur du symbole de la valeur absolue.
Le sommet (0, 0) divise le graphique de la fonction valeur absolue $y = |x|$ en deux parties distinctes.



Pour toute valeur de x inférieure à zéro, la valeur de y est égale à $-x$. Pour toute valeur de x supérieure à zéro, la valeur de y est égale à x.

Puisque la fonction est définie par une règle différente dans chaque intervalle du domaine, on peut la décrire comme une **fonction définie par morceaux** :

$$y = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

d) Quand $x \geq -1/3$, le graphique de $g(x) = |3x+1|$ correspond à celui de $f(x) = 3x+1$
Quand $x < -1/3$, le graphique de $g(x)$ correspond à celui de $f(x)$ après une réflexion par rapport à l'axe des x.

$$g(x) = \begin{cases} 3x+1, \text{ si } x \geq -1/3 \\ -(3x+1), \text{ si } x < -1/3 \end{cases}$$

Ex. 5 Soit les fonctions $f(x) = 3x + 1$ et $g(x) = |3x + 1|$:

a) Détermine l'ordonnée à l'origine et l'abscisse à l'origine des deux fonctions.
b) Trace les graphiques des deux fonctions.
c) Détermine le domaine et l'image des deux fonctions.
d) Indique la fonction définie par morceaux pour la fonction valeur absolue.

a) $f(x) = 3x + 1$

<u>o.o.</u>
$f(x) = 3(0) + 1$
$f(x) = 0 + 1$
$f(x) = 1$
$(0, 1)$

<u>a.o.</u>
$0 = 3x + 1$
$-1 = 3x$
$-1/3 = x$
$(-1/3, 0)$

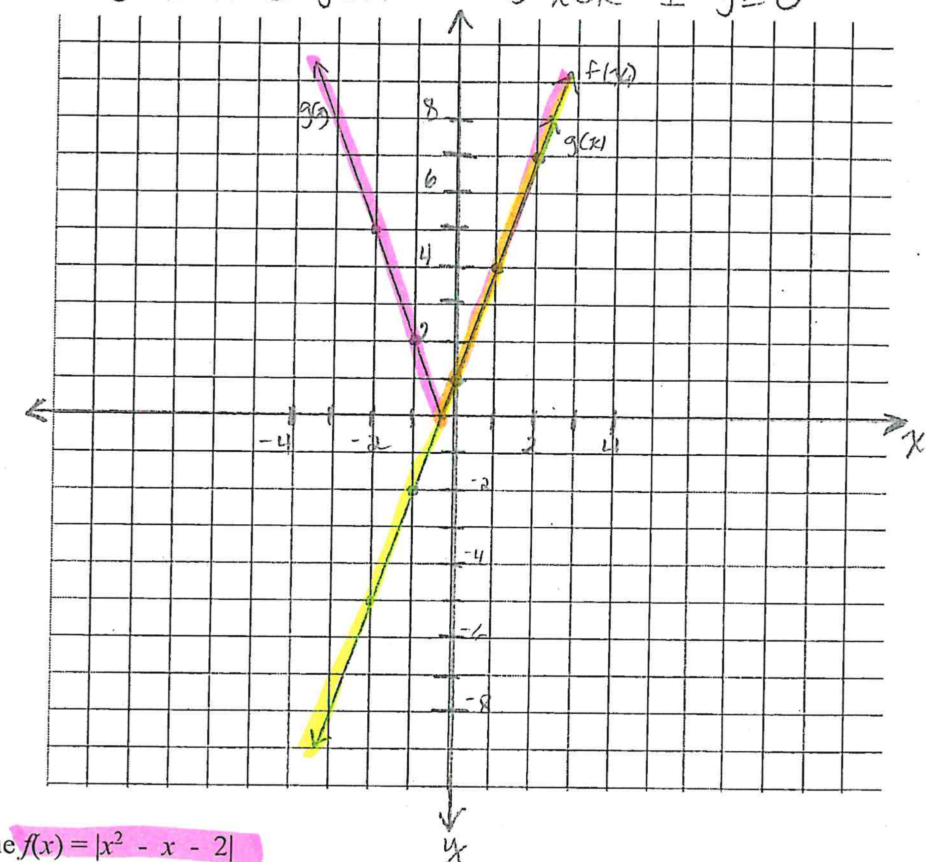
$g(x) = |3x + 1|$

<u>o.o.</u>
$g(x) = |3(0) + 1|$
$g(x) = |0 + 1|$
$g(x) = |1|$
$g(x) = 1$
$(0, 1)$

<u>a.o.</u>
$0 = |3x + 1|$
$0 = 3x + 1$
$-1 = 3x$
$-1/3 = x$
$(-1/3, 0)$

c) $f(x)$
D: $x \in \mathbb{R}$ I: $y \in \mathbb{R}$

$g(x)$
D: $x \in \mathbb{R}$ I: $y \geq 0$



b)

x	$f(x)$	$g(x)$
-2	-5	$\|-5\| = 5$
-1	-2	$\|-2\| = 2$
1	4	$\|4\| = 4$
2	7	$\|7\| = 7$

Ex.6 Soit la fonction valeur absolue $f(x) = |x^2 - x - 2|$

a) Détermine l'ordonnée à l'origine et les abscisses à l'origine.
b) Trace le graphique de la fonction.
c) Détermine le domaine et l'image.
d) Indique la fonction définie par morceaux correspondante.

a) <u>o.o.</u>
$f(x) = |x^2 - x - 2|$
$f(x) = |(0)^2 - (0) - 2|$
$f(x) = |-2|$
$f(x) = 2$
$(0, 2)$

<u>a.o.</u>
$0 = |x^2 - x - 2|$
$1/4 + 2 = (x^2 - x + 1/4)$
$\sqrt{9/4} = \sqrt{(x - 1/2)^2}$
$\pm 3/2 = x - 1/2$
$1/2 \pm 3/2 = x$
$x = 2$ et $x = -1$ $(2,0)$ et $(-1,0)$

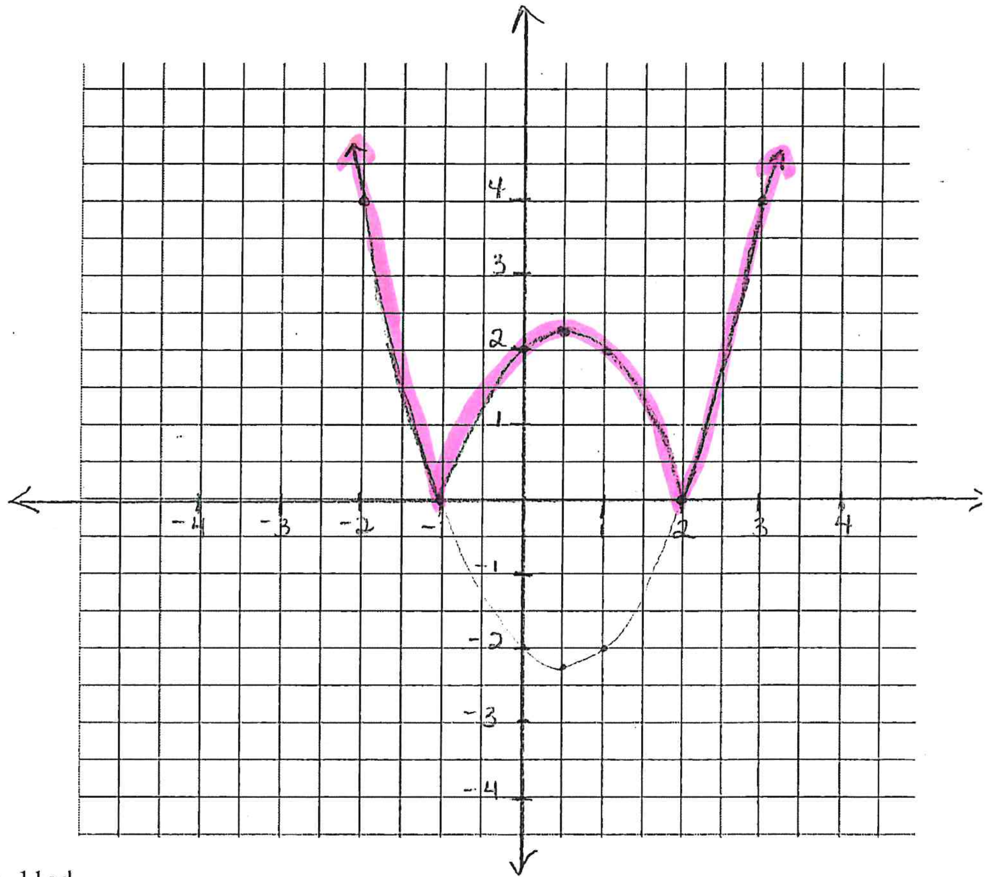
b) Sommet : $(1/2, |-2\,1/4|)$
$(1/2, 2\,1/4)$

c) Domaine : $x \in \mathbb{R}$

Image : $y \geq 0$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 2, \text{ si } x \leq -1 \text{ ou } x \geq 2 \\ -(x^2 - x - 2), \text{ si } -1 < x < 2 \end{cases}$

graphique au verso.



Exercice (pg 375) : #2, 3, 6c, 8c, 11ad

C. Les équations valeur absolue

Une **équation valeur absolue** est une équation où une inconnue apparaît à l'intérieur du symbole de la valeur absolue.
Il y a deux cas il faut tenir compte :

1. La valeur de l'expression à l'intérieur du symbole de la valeur absolue est positive ou égale à zéro.
2. La valeur de l'expression à l'intérieur du symbole de la valeur absolue est négative.

Ex. 7 Résous l'équation $|x + 5| = 4x - 1$. Vérifie les solutions.

Fonction définie par morceau $|x+5| = \begin{cases} x+5, \text{ si } x \geq -5 \\ -(x+5), \text{ si } x < -5 \end{cases}$

a.o. $x+5=0$
$x=-5$

<u>Cas 1</u> (la valeur absolue est positive)

$x+5 = 4x-1$
$5+1 = 4x-x$
$6 = 3x$
$2 = x$

Cette valeur satisfait $x \geq -5$
(ou vérifie)

<u>Cas 2</u> (la valeur absolue est négative)

$-(x+5) = 4x-1$
$-x-5 = 4x-1$
$-5+1 = 4x+x$
$-4 = 5x$
$-4/5 = x$

Cette valeur ne satisfait pas à $x < -5$. Elle est une racine étrangère.
(ou vérifie)

<u>Vérification</u> $x=2$

$\lvert x+5 \rvert$	$4x-1$
$\lvert (2)+5 \rvert$	$4(2)-1$
$\lvert 7 \rvert$	$8-1$
7	7

$x=-4/5$

$\lvert (-4/5)+5 \rvert$	$4(-4/5)-1$
$\lvert 21/5 \rvert$	$-16/5-1$
$21/5$ ou $4\,1/5$	$-21/5$

La solution est $x=2$.

Ex. 8 Résous l'équation $|4x - 5| + 9 = 2$.

→ isole valeur absolue

$$|4x-5| = 2-9$$
$$|4x-5| = -7 \Leftarrow$$ Ceci n'est jamais vrai, car une valeur absolue donne toujours une valeur positive.

Cette équation n'a aucune solution réelle.

ou

La solution est l'ensemble vide.

Ex. 9 Résous l'équation $|x^2 - 3x| = 2$

$x(x-3)=0$
$x=0$
$x=3$

$$|x^2-3x| = \begin{cases} x^2-3x, \text{ si } x \leq 0 \text{ ou } x \geq 3 \\ -(x^2-3x), \text{ si } 0 < x < 3 \end{cases}$$

Cas 1

$x^2 - 3x = 2$

$x^2 - 3x - 2 = 0$

$a=1 \quad b=-3 \quad c=-2$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-(-8)}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$x = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$ $\qquad$ $x = \frac{3-\sqrt{17}}{2}$

$x \approx 3,56...$ $\qquad$ $x \approx -0,56...$

satisfait à $x \geq 3$ $\qquad$ satisfait à $x \leq 0$

Cas 2

$-(x^2-3x) = 2$

$-x^2 + 3x - 2 = 0$

$a=-1 \quad b=3 \quad c=-2$

$$x = \frac{-(3) \pm \sqrt{(3)^2 - 4(-1)(-2)}}{2(-1)}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-2}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{-2}$$

$$x = \frac{-3 \pm 1}{-2}$$

$x = 1 \quad x = 2$

satisfait à $0 < x < 3$

} On fait la vérification

Les solutions sont $x = 1$, $x = 2$ et $x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$

Exercices (pg 389) : #4, 6bcd, 9, 15