Module : La trigonométrie

A. Les angles en position standard
B. Les rapports trigonométriques
C. La loi de sinus
D. La loi de cosinus

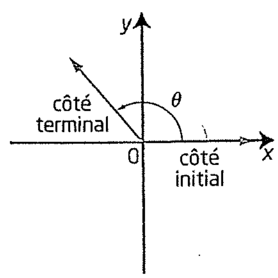
* Pour ce module calculatrice doit être en mode degré

A. Les angles en position standard

Dans un plan cartésien, on peut générer un angle grâce à la rotation d'une demi-droite autour de l'origine.

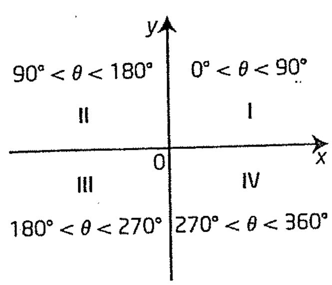
La position initiale de la demi-droite, sur l'axe des x, définit le **côté initial** de l'angle.

Sa position finale, après une rotation autour de l'origine, définit le **côté terminal** de l'angle.



Un **angle en position standard** est un angle dont le sommet se situe à l'origine des axes d'un plan cartésien.

N.B. L'axe des x et l'axe des y divisent le plan en quatre quadrants.



Ex. Sur un papier graphique, esquisse chaque angle en position standard. Indique le quadrant dans lequel se situe le côté terminal. A) 150° B) 60° C) 240°

Voir feuille

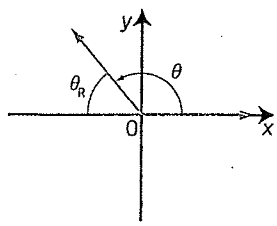
Pour chaque angle en position standard, il y a un angle aigu correspondant appelé **angle de référence**. Il est l'angle aigu formé par le côté terminal et l'axe des x.

Cet angle est toujours positif et est compris entre 0° et 90°.

Les images suivantes illustrent l'angle de référence, θ_R, pour différents angles en position standard, θ, où $0° \leq \theta \leq 360°$.

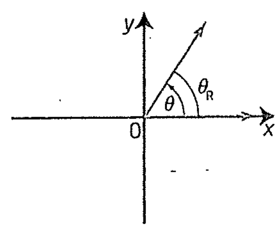
N.B. Le symbole θ, est la lettre grecque «thêta». En trigonométrie et géométrie, ce symbole est utilisé pour représenter un angle.

Quadrant II



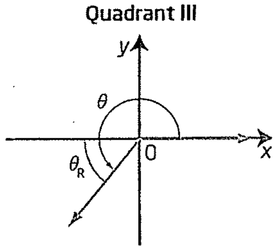
$\theta_R = 180° - \theta$

Quadrant I



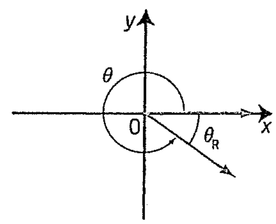
$\theta_R = \theta$

Quadrant III



$\theta_R = \theta - 180°$

Quadrant IV



$\theta_R = 360° - \theta$

Les rapports trigonométriques d'un angle en position standard sont égaux à ceux de son angle de référence, mais leur signe peut être différent. Le triangle rectangle qui contient l'angle de référence et dont l'un des côtés se trouve sur l'axe des x, est appelé le triangle de référence.

Ex. Détermine l'angle de référence θ_R, de chaque angle θ. Sur un papier graphique, esquisse les angles θ et θ_R en position standard. A) $\theta = 75°$ B) $\theta = 240°$

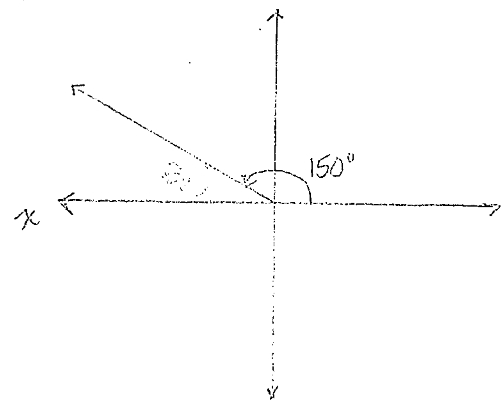
voir feuille.

Trigonométrie

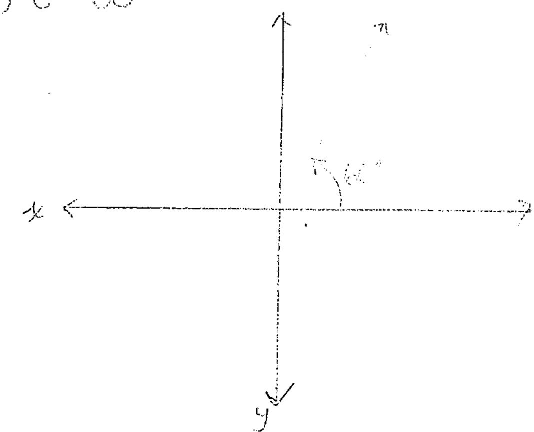
§ Les angles en position standard

Ex

A) $\theta = 150°$



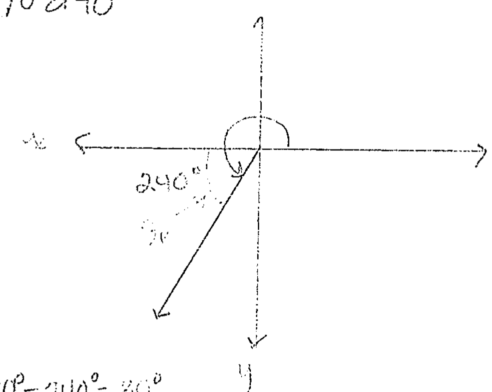
B) $\theta = 60°$



Si $\theta = 150°$, $90° \leq \theta \leq 180°$. Le côté terminal se trouve dans QII.

Si $\theta = 60°$, $0° \leq \theta \leq 90°$. Le côté terminal se trouve dans QI.

C) $\theta = 240°$



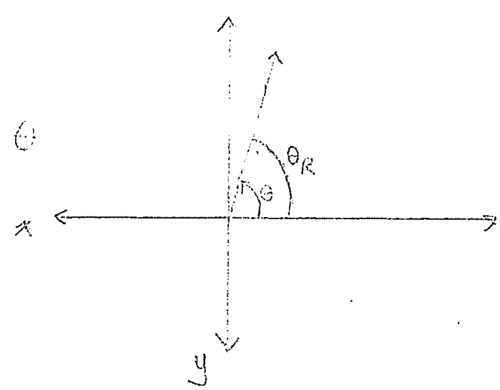
Si $\theta = 240°$, $180° \leq \theta \leq 270°$. Le côté terminal se trouve dans QIII.

$270° - 240° = 30°$

Ex. A) $\theta = 75°$

$0° \leq \theta \leq 90°$, $\theta_R = \theta$

$\therefore \theta_R = 75°$



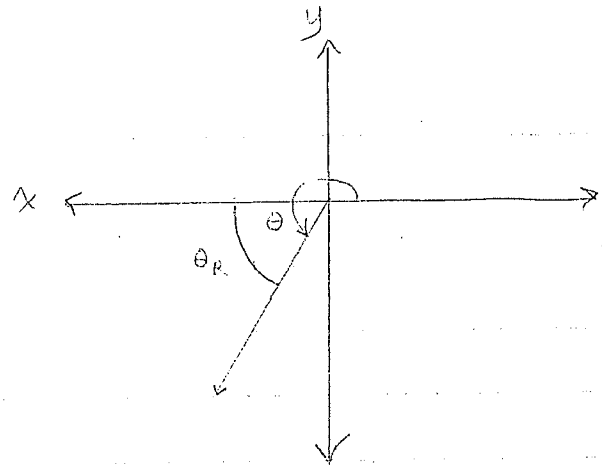
B) $\theta = 240^\circ$

$180^\circ \leq \theta \leq 270^\circ$

$\theta_R = \theta - 180^\circ$

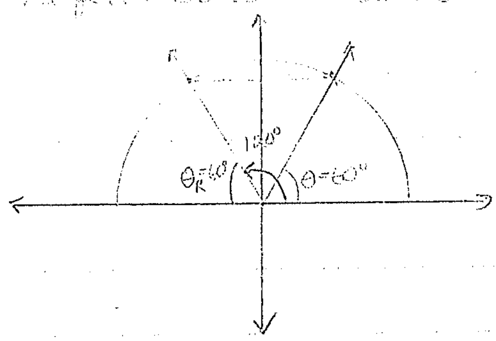
$\theta_R = 240^\circ - 180^\circ$

$\theta_R = 60^\circ$



Ex.

b) La réflexion d'un angle de 60° par rapport à y donne un angle de référence de 60° dans le QII. ($90^\circ \leq \theta_R \leq 180^\circ$)



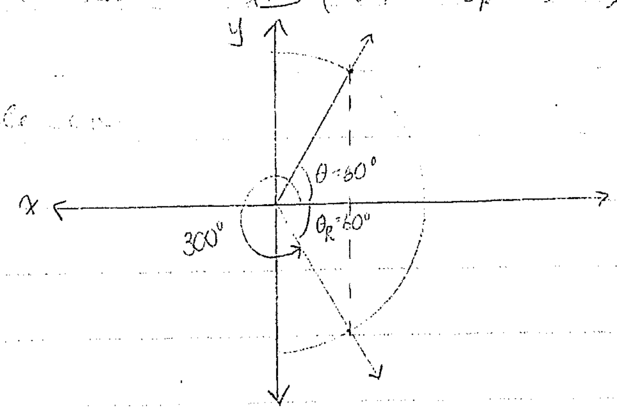
La mesure de l'angle en position standard correspondant est :

$180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

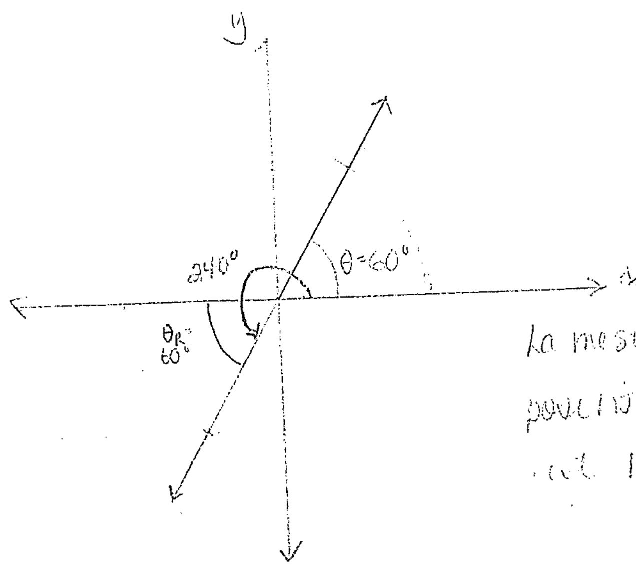
a) La réflexion d'un angle 60° par rapport à x donne un angle de référence de 60° dans le QIV ($270^\circ \leq \theta_R \leq 360^\circ$)

La mesure de l'angle en position standard correspondant est :

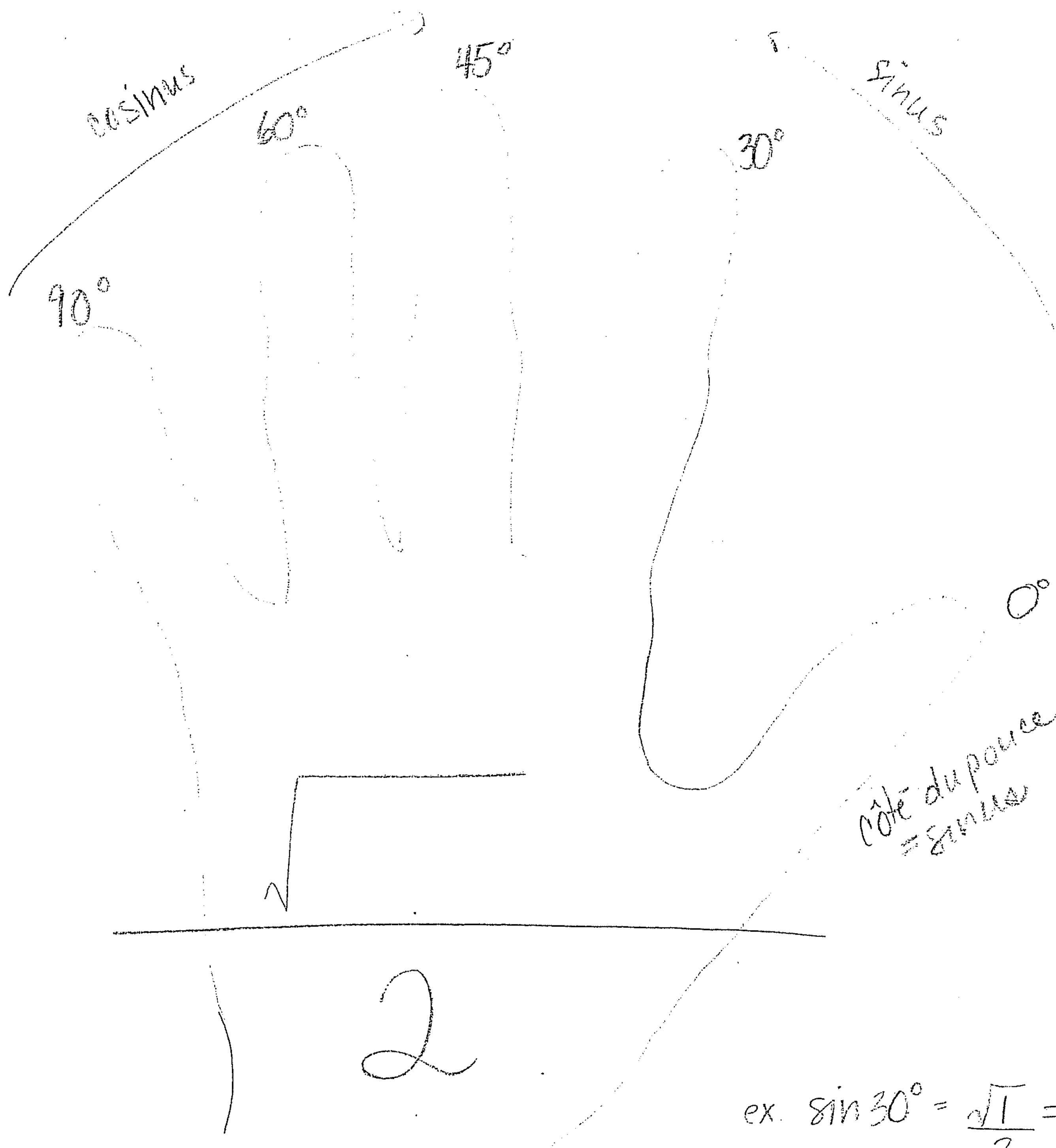
$360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$



c) La réflexion d'un angle de 60° par rapport à l'axe des y, puis par rapport à l'axe des x, donne un angle de référence de 60° dans le QIII. ($180° \leq \theta_R \leq 270°$)



La mesure de l'angle en position standard correspondant est $180° + 60° = 240°$



ex. $\sin 30° = \frac{\sqrt{1}}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}$

ex. $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

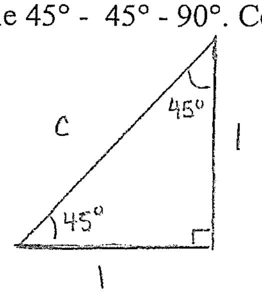
Ex. Détermine l'angle en position standard qu'on obtient lorsqu'on fait subir une réflexion à un angle de 60° par rapport :

a) À l'axe des x
b) À l'axe des y
c) À l'axe des y puis à l'axe des x

feuille

Il est possible de déterminer la **valeur exacte** des rapports trigonométriques des angles de 30°, 45° et 60°.

Si on trace un triangle, dont la longueur et la hauteur sont de 1 unité, on obtient un triangle 45° - 45° - 90°. Ce triangle est un triangle isocèle.



$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$(1)^2 + (1)^2 = c^2$$
$$1 + 1 = c^2$$
$$2 = c^2$$
$$\sqrt{2} = c$$

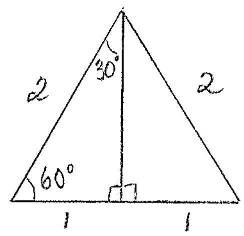
$\sin\theta = \frac{opp}{hyp}$ $\qquad$ $\cos\theta = \frac{adj}{hyp.}$ $\qquad$ $\tan\theta = \frac{opp}{adj}$

$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ← rationnalise $\qquad$ $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad$ $\tan 45° = \frac{1}{1}$

$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ $\qquad$ $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $\tan 45° = 1$

$\sin 45° = \sqrt{2}$

Trace un triangle équilatéral, dont chaque côté est de 2 unités. Si on trace un segment partant du sommet et coupant la base en deux, on obtient deux triangles 30° - 60° - 90°.



$a^2 + b^2 = c^2$
$(1)^2 + b^2 = (2)^2$
$1 + b^2 = 4$
$b^2 = 4 - 1$
$\sqrt{b^2} = \sqrt{3}$
$b = \sqrt{3}$

$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\sin 30° = \frac{1}{2}$

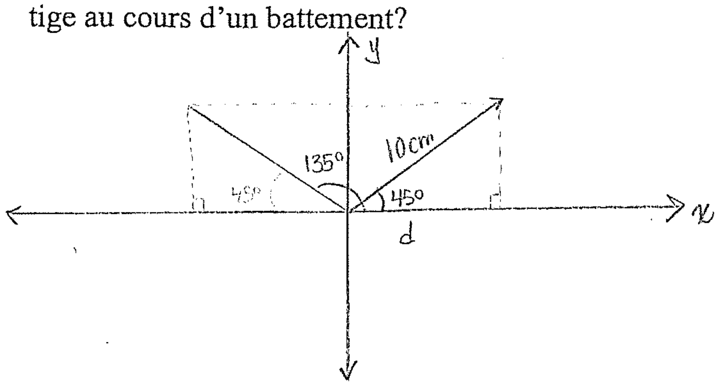
$\cos 60° = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{1}$ ou $\sqrt{3}$ $\qquad$ $\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ← rationnalise

$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ $\qquad$ $\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

voir feuille avec main
vidéo Youtube: Exact trig values Hand Trick - FuseSchool

Ex. Un métronome aide à tenir le rythme quand on joue le piano. La longueur de la tige de pendule est de 10 cm. Pour un tempo donné, la tige de pendule oscille entre 45° et 135°. Quelle est la valeur exacte de la distance horizontale parcourue par l'extrémité de la tige au cours d'un battement?



$\cos 45° = \frac{d}{10}$
$10 \cos 45° = d$
$10\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = d$
$\frac{10\sqrt{2}}{2} = d$
$5\sqrt{2} = d$

Étant donné que l'θ_R est 45°, la tige fait la même distance lorsqu'elle oscille à 135°.

Distance totale $= 2(5\sqrt{2})$ ou $5\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$

$D_t = 10\sqrt{2}$ cm

C'est environ 14,14... cm

Exercice 1 (pg 83) : #2, 3ace, ~~4b~~, 6ac, ~~8~~, 11, ~~12~~, 13

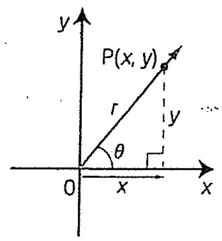
B. Les rapports trigonométriques

Soit θ, un angle quelconque en position standard, et P(x, y), un point quelconque situé sur son côté terminal à une distance r de l'origine. Selon le théorème de Pythagore, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$c^2 = a^2 + b^2$

$\sqrt{c^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$



On peut utiliser le triangle de référence pour déterminer les trois rapports trigonométriques de base en fonction de x, y, r.

$\sin \theta = \dfrac{\textit{côté opposé}}{\textit{hypoténuse}}$ $\cos \theta = \dfrac{\textit{côté adjacent}}{\textit{hypoténuse}}$ $\tan \theta = \dfrac{\textit{côté opposé}}{\textit{côté adjacent}}$

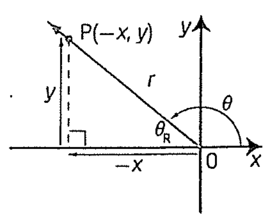
$\sin \theta = \dfrac{y}{r}$ $\cos \theta = \dfrac{x}{r}$ $\tan \theta = \dfrac{y}{x}$

Voici un résumé des signes des rapports trigonométriques selon le quadrant. En commençant dans le quadrant IV, on peut utiliser la règle de CAST pour déterminer quel rapport est positif.

Quadrant II
$90° < \theta < 180°$

$\sin \theta = \dfrac{y}{r}$ $\cos \theta = \dfrac{-x}{r}$ $\tan \theta = \dfrac{y}{-x}$

$\sin \theta > 0$ $\cos \theta < 0$ $\tan \theta < 0$



S

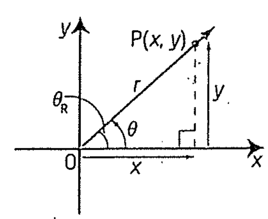
$\theta = 180° - \theta_R$

sin est +

Quadrant I
$0° < \theta < 90°$

$\sin \theta = \dfrac{y}{r}$ $\cos \theta = \dfrac{x}{r}$ $\tan \theta = \dfrac{y}{x}$

$\sin \theta > 0$ $\cos \theta > 0$ $\tan \theta > 0$



Pourquoi r est-il toujours positif?

A

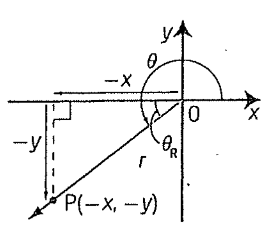
"All" sont +

$\theta = \theta_R$

Quadrant III
$180° < \theta < 270°$

$\sin \theta = \dfrac{-y}{r}$ $\cos \theta = \dfrac{-x}{r}$ $\tan \theta = \dfrac{-y}{-x}$

$\sin \theta < 0$ $\cos \theta < 0$ $\tan \theta > 0$

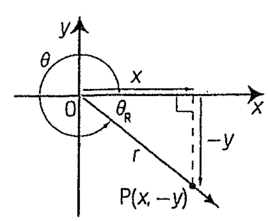


T

Quadrant IV
$270° < \theta < 360°$

$\sin \theta = \dfrac{-y}{r}$ $\cos \theta = \dfrac{x}{r}$ $\tan \theta = \dfrac{-y}{x}$

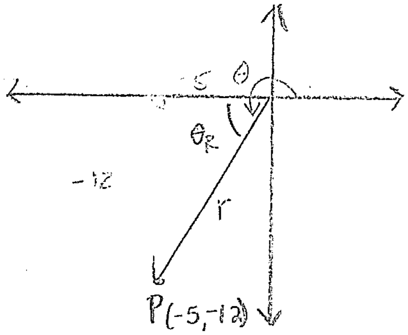
$\sin \theta < 0$ $\cos \theta > 0$ $\tan \theta < 0$



C

cos est +

Ex. Le point P(-5, -12) est situé sur le côté terminal d'un angle θ en position standard. Détermine la valeur exacte des rapports trigonométriques sin θ, cos θ et tan θ.



$r = \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2}$

$r = \sqrt{25 + 144}$

$r = \sqrt{169}$

$r = 13$

$\sin\theta = \frac{y}{r}$

$\boxed{\sin\theta = \frac{-12}{13}}$

$\cos\theta = \frac{x}{r}$

$\boxed{\cos\theta = \frac{-5}{13}}$

$\tan\theta = \frac{y}{x}$

$\tan\theta = \frac{-12}{-5}$

$\boxed{\tan\theta = \frac{12}{5}}$

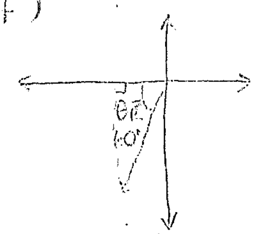
Ex. Détermine la valeur exacte de sin 240°.

- côté terminal est dans QIII, donc $\sin\theta < 0$ (négatif)

$\theta_R = \theta - 180°$

$\theta_R = 240° - 180°$

$\theta_R = 60°$



$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ mais dans QIII donc la valeur exacte de sin 240°

est $\boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$

Ex. Soit θ, un angle en position standard dont le côté terminal se situe dans le quadrant III, et $\tan\theta = \frac{1}{5}$. Détermine les valeurs exactes de sin θ et de cos θ.

QIII : $\sin\theta < 0$ et $\cos\theta < 0$

$\tan\theta = \frac{1}{5}$

$\tan\theta = \frac{y}{x}$ $\quad y = 1$, $x = 5$

$r = ?$

$r = \sqrt{(5)^2 + (1)^2}$

$r = \sqrt{25 + 1}$

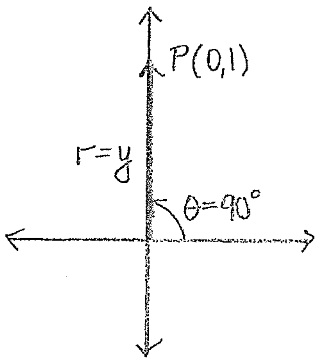
$r = \sqrt{26}$

$\sin\theta = \frac{y}{r}$ QIII $\sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{26}} \xRightarrow{\text{rationalise}} \frac{-\sqrt{26}}{26}$

$\cos\theta = \frac{x}{r}$ QIII $\cos\theta = \frac{-5}{\sqrt{26}} \Rightarrow \frac{-5\sqrt{26}}{26}$

Un **angle quadrantal** est un angle en position standard dont le côté terminal coïncide avec un des axes du plan cartésien. Par exemple, 0°, 90°, 180°, 270° et 360° sont des angles quadrantaux.

Ex. Détermine les valeurs de sin θ, cos θ et tan θ si le côté terminal de l'angle quadrantal θ coïncide avec la partie positive de l'axe des y, soit $\theta = 90°$.



$x = 0$

$\sin\theta = \frac{y}{r}$ $\quad$ $\cos\theta = \frac{x}{r}$ $\quad$ $\tan\theta = \frac{y}{x}$

$\sin 90° = \frac{1}{1}$ $\quad$ $\cos 90° = \frac{0}{1}$ $\quad$ $\tan 90° = \frac{1}{0} \leftarrow !$

$\sin 90° = 1$ $\quad$ $\cos 90° = 0$ $\quad$ $\tan 90° =$ non définie

Ex. À l'aide du tableau, détermine les valeurs de sin , cos et tan pour les angles quadrantaux 0°, 90°, 180° et 270°.

	0° ou 360°	90°	180°	270°
sin θ	0	1	0	−1
cos θ	1	0	−1	0
tan θ	0	non définie	0	non définie

Déterminer un angle à partir de son sinus, de son cosinus ou de sa tangente :

- Détermine dans quel quadrant se trouveront la ou les solutions à partir du signe du rapport trigonométrique donné.
- Détermine l'angle de référence.
- Esquisse l'angle de référence dans le quadrant approprié. À l'aide de ce schéma, détermine la mesure de l'angle en position standard qui correspond à l'angle de référence.

Ex. Résous l'équation $\sin\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$, où $0° \le \theta < 360°$.

$\sin\theta < 0 \Rightarrow Q\overline{III}$ ou $Q\overline{IV}$

$\sin\theta = \frac{y}{r}$

$\sin\theta_R = \frac{\sqrt{2}}{2}$

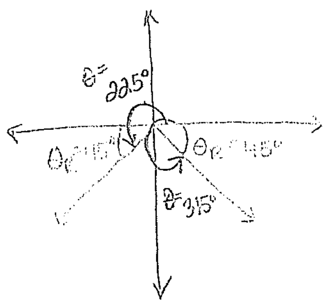
$\theta_R = 45°$

$Q\overline{III}$:

$\theta = 180° + \theta_R$

$\theta = 180° + 45°$

$\theta = 225°$



$Q\overline{IV}$:

$\theta = 360° - \theta_R$

$\theta = 360° - 45°$

$\theta = 315°$

Ex. Détermine la mesure de θ, au degré près, si $\sin\theta = -0{,}8090$ et $0° \le \theta < 360°$.

$\sin\theta < 0 \Rightarrow Q\overline{III}$ ou $Q\overline{IV}$

$\sin\theta = 0{,}8090$ (pas négatif !)

$\theta_R = \sin^{-1}(0{,}8090)$

$\theta_R = 53{,}998...$

$\theta_R = 54°$

$Q\overline{III}$:

$\theta = 180° + \theta_R$

$\theta = 180° + 54°$

$\theta = 234°$

$Q\overline{IV}$:

$\theta = 360° - \theta_R$

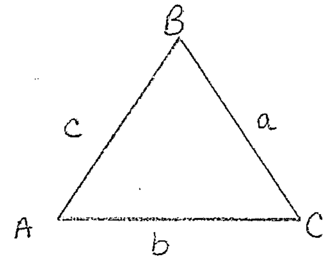
$\theta = 360° - 54°$

$\theta = 306°$

Exercice 2 (pg 96) : 3c, 4ac, 5b, 6ac, 7, 8abc, 9bdf, 11b, 14 et 22.

C. La loi des sinus

Rappel :



angles: lettres majuscules
côtés (opposés à l'angle): lettres minuscule

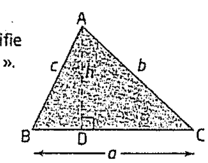
La trigonométrie des triangles rectangles permet de résoudre des problèmes comportant des triangles rectangles. Cependant, on peut aussi appliquer la trigonométrie (avec modification) pour résoudre des problèmes comportant des triangles obliques.

Un **triangle oblique** est un triangle qui ne possède pas d'angle droit.

La **loi des sinus** décrit la relation entre les mesures des côtés et des angles d'un triangle quelconque.

Dans le $\triangle ABC$, trace une hauteur $AD \perp BC$.
Soit $\overline{AD} = h$.

Le symbole $\perp$ signifie « perpendiculaire à ».



Dans le $\triangle ABD$:

$$\sin \angle B = \frac{h}{c}$$
$$h = c \sin \angle B$$

Dans le $\triangle ACD$:

$$\sin \angle C = \frac{h}{b}$$
$$h = b \sin \angle C$$

Pose que ces deux équations sont égales, puisqu'elles sont toutes deux égales à h :

$$c \sin \angle B = b \sin \angle C$$

Divise les deux membres de l'équation par $\sin \angle B \sin \angle C$.

$$\frac{c}{\sin \angle C} = \frac{b}{\sin \angle B}$$

Ceci est la première partie de la loi des sinus.

Si tu traces une hauteur à partir de C et que tu suis les mêmes étapes, tu peux montrer que :

$$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B}$$

Par conséquent,

$$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C} \quad \text{ou} \quad \frac{\sin \angle A}{a} = \frac{\sin \angle B}{b} = \frac{\sin \angle C}{c}$$

Loi des sinus

Soit le ΔABC, un triangle quelconque où a, b et c sont les longueurs des côtés opposés à $\angle A$, $\angle B$ et $\angle C$ respectivement.

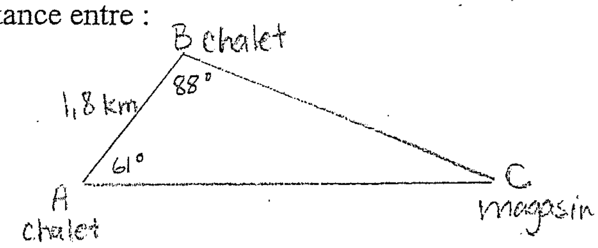
$$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C}$$

Ou

$$\frac{\sin \angle A}{a} = \frac{\sin \angle B}{b} = \frac{\sin \angle C}{c}$$

Ex. En utilisant le diagramme suivant, détermine la distance entre :

a) Le chalet A et le magasin (C)
b) Le chalet B et le magasin (C)



Arrondis les réponses au dixième de km près.

$\angle A = 61°$ $\quad a = ? \Rightarrow$ distance B et C

$\angle B = 88°$ $\quad b = ? \Rightarrow$ distance A et C

$\angle C = ?$ $\quad c = 1{,}8$ km

$\angle C = 180° - (61° + 88°)$

$\angle C = 31°$

a) $$\frac{c}{\sin \angle C} = \frac{b}{\sin \angle B}$$

$$(\sin 88°)\frac{1{,}8}{\sin 31°} = \frac{b}{\cancel{\sin 88°}}(\cancel{\sin 88°})$$

$$\frac{(0{,}999\ldots)(1{,}8)}{0{,}515\ldots} = b$$

$$\frac{1{,}798\ldots}{0{,}515\ldots} = b$$

$$3{,}492\ldots = b$$

La distance entre Chalet A et le magasin est environ 3,5 km.

b) $$\frac{c}{\sin \angle C} = \frac{a}{\sin \angle A}$$

$$(\sin 61°)\frac{1{,}8}{\sin 31°} = \frac{a}{\cancel{\sin 61°}}(\cancel{\sin 61°})$$

$$\frac{1{,}574\ldots}{0{,}515\ldots} = a$$

$$3{,}056\ldots = a$$

La distance entre Chalet B et le magasin est environ 3,1 km.

Ex. Dans le ΔLMN, $\angle L = 64°$, $l = 25{,}2$ cm et $m = 16{,}5$ cm. Détermine la mesure de $\angle N$, au degré près.

$\angle L = 64°$ $\quad l = 25{,}2$ cm

$\angle M = ?$ $\quad m = 16{,}5$ cm

$\angle N = ?$

Pour trouver $\angle N$, besoin $\angle M$.

$$\frac{\sin \angle L}{l} = \frac{\sin \angle M}{m}$$

$$(16{,}5)\frac{\sin 64°}{25{,}2} = \frac{\sin \angle M}{16{,}5}(16{,}5)$$

$$14{,}830\ldots = \sin \angle M$$

$\longrightarrow$ $0{,}588\ldots = \sin \angle M$

$\sin^{-1}(0{,}588\ldots) = \angle M$

$36{,}050\ldots° = \angle M$

$\angle N = 180° - (64° + 36{,}050\ldots°)$

$\angle N = 79{,}949\ldots$

$$\boxed{\angle N \approx 80°}$$

Le cas ambigu

Avant de résoudre un triangle, on doit analyser les données connues afin d'établir s'il existe une solution.

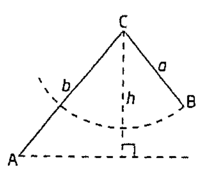
Si on connaît la mesure de deux angles et la longueur d'un côté (angle-côté-angle ou ACA), alors il y a seulement un triangle possible.

Cependant, si on connaît la longueur de deux côtés et la mesure de l'angle opposé à l'un de ces côtés (côté-côté-angle ou CCA), le **cas ambigu** peut se présenter.

Il y a trois possibilités dans le cas ambigu :

- Aucune solution : il n'existe aucun triangle correspondant aux mesures données;
- Une solution : il existe un seul triangle correspondant à ces mesures;
- Deux solutions : il existe deux triangles distincts correspondant à ces mesures.

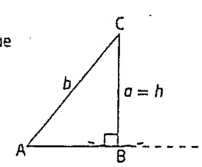
Si $\angle$A est un angle aigu, les quatre longueurs possibles du côté a donnent lieu à quatre cas différents.



$a < h$
$a < b \sin \angle A$
pas de solution

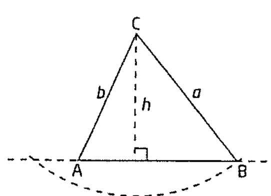
Pourquoi n'y a-t-il pas de solution dans ce cas?

Souviens-toi que $h = b \sin \angle A$.



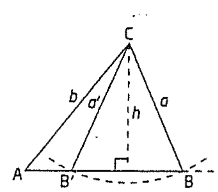
$a = h$
$a = b \sin \angle A$
une solution

Quel type de triangle correspond à ce cas?



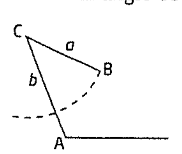
$a \geq b$
une solution

Pourquoi n'y a-t-il pas une autre solution avec l'angle B à gauche de l'angle A?

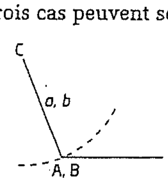


$h < a < b$
$b \sin \angle A < a < b$
deux solutions

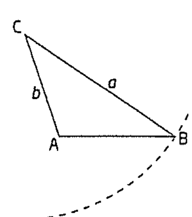
Si $\angle$A est un angle obtus, trois cas peuvent se présenter.



$a < b$
pas de solution



$a = b$
pas de solution



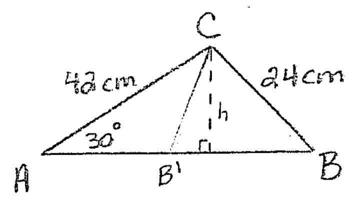
$a > b$
une solution

Ex. Dans le ΔABC, ∠A = 30°, a = 24 cm et b = 42 cm. Détermine les mesures manquantes. Arrondis tes réponses à l'unité près.

$\angle A = 30°$ $a = 24$ cm
$\angle B = ?$ $b = 42$ cm
$\angle C = ?$ $c = ?$

angle aigu, $a < b$:
Si $a < b\sin\angle A \Rightarrow$ pas de solution
$a = b\sin\angle A \Rightarrow$ une solution
$a > b\sin\angle A \Rightarrow$ 2 solutions

$h = b\sin\angle A$
$h = (42)(\sin 30°)$
$h = 42(\frac{1}{2})$
$h = 21$
$a > b\sin\angle A \Rightarrow$ 2 solution



Triangle 1 ΔABC

$\angle B$:
$$\frac{\sin\angle B}{b} = \frac{\sin\angle A}{a}$$
$$(\cancel{42})\frac{\sin\angle B}{\cancel{42}} = \frac{\sin 30°(42)}{24}$$
$$\sin\angle B = \frac{21}{24}$$
$$\sin\angle B = 0,875$$
$$\angle B = \sin^{-1}(0,875)$$
$$\angle B = 61,0449...°$$
$\angle B \approx 61°$

$$\angle C = 180° - (30° + 61°)$$
$$\angle C = 89°$$
$$\frac{c}{\sin\angle C} = \frac{a}{\sin\angle A}$$
$$\frac{c}{\sin 89°} = \frac{24}{\sin 30°}$$
$$c = \frac{24(\sin 89°)}{\sin 30°}$$
$$c = \frac{23,996...}{0,5}$$
$$c = 47,992...$$ $c \approx 48$ cm

Mesures manquantes
$\angle B \approx 61°$
$\angle C \approx 89°$
$c \approx 48$ cm

Triangle 2 ΔAB'C

$\angle B' = 180° - \theta_R$ ← $\angle B$
$\angle B' = 180° - 61°$
$\angle B' = 119°$

$\angle C = 180° - (30° + 119°)$
$\angle C = 31°$

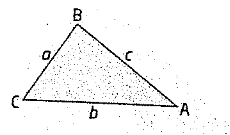
$$\frac{c}{\sin\angle C} = \frac{a}{\sin\angle A}$$
$$\frac{c}{\sin 31°} = \frac{24}{\sin 30°}$$
$$c = \frac{24(\sin 31°)}{\sin 30°}$$
$$c = \frac{12,360...}{0,5}$$
$$c = 24,721...$$
$c \approx 25$ cm

Mesures manquantes
$\angle B' \approx 119°$
$\angle C \approx 31°$
$c \approx 25$ cm

Exercice 3 (pg 108-112) : 4ac, 5ac, 6, 8, 10, 11 et 17

D. La loi du cosinus

La **loi du cosinus** décrit la relation qui existe entre le cosinus d'un angle et la longueur des trois côtés d'un triangle quelconque.



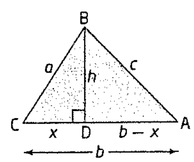
Pour tout $\triangle ABC$, où a, b et c sont les longueurs des côtés opposés à $\angle A$, $\angle B$ et $\angle C$ respectivement, la loi du cosinus stipule que :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle C$$

Cette formule peut prendre différentes formes pour déterminer la longueur d'autres côtés du triangle :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \angle B$$

Dans le $\triangle ABC$, trace une hauteur h.



Dans le $\triangle BCD$:

$\cos \angle C = \frac{x}{a}$ $\qquad a^2 = h^2 + x^2$

$x = a \cos \angle C$

Dans le $\triangle ABD$, utilise le théorème de Pythagore :

$c^2 = h^2 + (b - x)^2$

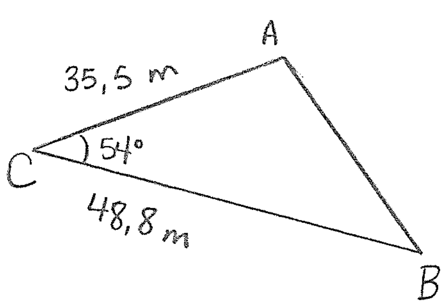
$c^2 = h^2 + b^2 - 2bx + x^2$

$c^2 = h^2 + x^2 + b^2 - 2bx$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2b(a \cos \angle C)$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle C$

Ex. Elmo veut déterminer la distance entre deux points, A et B, situés aux extrémités opposées d'un étang. Il repère un point C qui se trouve à 35,5 m du point A et à 48,8 m du point B. L'angle du point C est de 54°. Détermine la distance AB, au dixième de mètre près. $\overline{AB}$ = côté c



$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle C$

$c^2 = (48{,}8)^2 + (35{,}5)^2 - 2(48{,}8)(35{,}5)\cos 54°$

$c^2 = 2381{,}44 + 1260{,}25 - 3464{,}8\,(0{,}587...)$

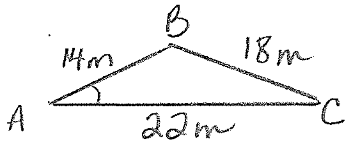
$c^2 = 3641{,}69 - 2036{,}558...$

$\sqrt{c^2} = \sqrt{1605{,}131...}$

$c = 40{,}064...$

$\boxed{c \approx 40{,}1 \text{ m}}$

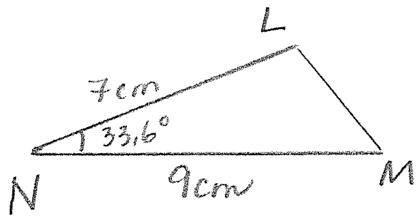
Ex. Les côtés d'une entretoise triangulaire mesurent 14 m, 18 m et 22 m. Détermine la mesure de l'angle opposé au côté de 18 m, au degré près.



$\angle A = ?$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle A$$
$$(18)^2 = (22)^2 + (14)^2 - 2(22)(14)\cos\angle A$$
$$324 = 484 + 196 - 616\cos\angle A$$
$$324 = 680 - 616\cos\angle A$$
$$324 - 680 = -616\cos\angle A$$
$$\frac{-356}{-616} = \frac{-616\cos\angle A}{-616}$$
$$0{,}577\ldots = \cos\angle A$$
$$\cos^{-1}(0{,}577\ldots) = \angle A$$
$$54{,}695\ldots = \angle A$$
$$\boxed{\angle A \approx 55^\circ}$$

Ex. Dans le ΔLMN, $l = 9$ cm, $m = 7$ cm et $\angle N = 33{,}6°$. Fais un schéma et détermine les mesures manquantes, au dixième près.



$\angle L = ?$

$\angle M = ?$

$n = ?$

n :

$$n^2 = l^2 + m^2 - 2lm\cos\angle N$$
$$n^2 = (9)^2 + (7)^2 - 2(9)(7)\cos 33{,}6°$$
$$n^2 = 81 + 49 - 126(0{,}832\ldots)$$
$$n^2 = 130 - 104{,}948\ldots$$
$$\sqrt{n^2} = \sqrt{25{,}051\ldots}$$
$$n = 5{,}005\ldots$$
$$n \approx 5{,}0\text{ cm}$$

$\angle L$:

$$l^2 = m^2 + n^2 - 2mn\cos\angle L$$
$$(9)^2 = (7)^2 + (5)^2 - 2(7)(5)\cos\angle L$$
$$81 = 49 + 25 - 70\cos\angle L$$
$$81 - 74 = -70\cos\angle L$$
$$\frac{7}{-70} = \frac{-70\cos\angle L}{-70}$$
$$\cos^{-1}(-0{,}1) = \angle L$$
$$95{,}739\ldots° = \angle L$$
$$\boxed{95{,}7° \approx \angle L}$$

$\angle M$:

$$\angle M = 180° - 33{,}6° - 95{,}739\ldots°$$
$$\angle M = 50{,}660\ldots°$$
$$\boxed{\angle M \approx 50{,}7°}$$

Exercice 4 (pg 119) : 1b, 2b, 4ac, 5, 10, 11, 12, 17 et 19